1 Kombinatorik

1.1 Permutationen Kombinationen Variationen

1.1.1 Permutationen

Gewöhnliche Permutationen

Das Wort *Permutation* bedeutet *Reihenfolge*.

Beispiel 1.1

Wie viele Reihenfolgen (Permutationen) kann man für die vier Elemente A, B, C, D finden?
Lösung:
Man hat $n = 4$ Elemente und $n = 4$ Plätze.
Für den ersten Platz hat man vier Möglichkeiten, um ihn mit einem Element zu besetzen. Bei *jeder* dieser vier Möglichkeiten haben wir für den zweiten Platz nur noch drei Möglichkeiten, um ihn zu besetzen. Das sind zusammen:

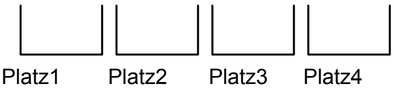


Abbildung 1-1

4.3=12 Möglichkeiten
Bei *jeder* dieser zwölf Möglichkeiten gibt es nun 2 Auswahlmöglichkeiten für den dritten Platz. Dadurch haben wir insgesamt
4.3.2=24 Möglichkeiten
Für den letzten Platz bleibt noch eine Möglichkeit. Somit haben wir:
4.3.2.1 = 4! Möglichkeiten (Man spricht „*vier Faktorielle*“ oder „*vier Fakultät.*“)

Allgemein gilt:

Von n verschiedenen Elementen gibt es n! = 1.2…….(n-1).n Permutationen

Zählprinzip

Beispiel 1.2

Unter *Zählprinzip* versteht man die Ordnung, in der man Permutationen nacheinander aufschreibt:
Man beginnt mit einer gegebenen *Anfangsreihenfolge.* (Alfabeth oder Größe von Zahlen)

Letzte zwei Glieder:
Zuerst vertauscht man nur die letzten beiden Glieder und lässt die anderen an ihren Plätzen. Dabei wird der vorletzte Platz von den beiden letzten Gliedern durchlaufen (C,D), am drittletzten Platz bleibt noch B

Letzte drei Glieder:
Danach besetzt man den drittletzten Platz nacheinander mit diesen Gliedern und bildet bei jeder dieser Möglichkeiten wieder die beiden Permutationen der letzten beiden Glieder. Am ersten Platz bleibt A immer noch unverändert. Wir haben also alle Permutationen der letzten drei Glieder gebildet (Permutationen Nr.1 bis Nr. 6)

Letzte vier Glieder:
Nun besetzt man den viertletzten Platz (= 1.Platz in unserem Beispiel) mit allen noch möglichen Elementen und bildet für jede dieser Möglichkeiten alle Permutationen der letzten drei Glieder.

Wenn es noch mehr Elemente gibt, fährt man in analoger Weise mit den weiteren Plätzen fort.

Nr			Nr			Nr			Nr	
1	ABCD		7	BACD		13	CABD		19	DABC
2	ABDC		8	BADC		14	CADB		20	DACB
3	ACBD		9	BCAD		15	CBAD		21	DBAC
4	ACDB		10	BCDA		16	CBDA		21	DBCA
5	ADBC		11	BDAC		17	CDAB		23	DCAB
6	ADCB		12	BDCA		18	CDBA		24	DCBA

Beispiel 1.3

Gegeben sind die geordneten Elemente ABCDEFG. Die *wievielte* Permutation ist AEDCFGB?

Lösung:
A ist am ersten Platz unverändert. Wie viel Permutationen der sechs letzten Glieder kommen vor unserer gegebenen Permutation AEDCFGB?

A
B **C** **D** — Alle Permutationen mit B,C,D am zweiten Platz liegen vorher, das sind: 5! . 3 = 120.3 = 360 Permutationen
E
F
G

Nun fragen wir: Wie viel Permutationen der fünf letzten Glieder, die E am zweiten Platz haben, liegen vor unserer gegebenen Permutation?

A E **B** **C** — Alle Permutationen mit B,C am dritten Platz liegen vorher, das sind: 4!.2 = 24.2 = 48 Permutationen
D
F
G

Außerdem gilt:

A E D **B** — Alle Permutationen mit B am vierten Platz liegen vorher, das sind: 3! = 6 Permutationen
C
F
G

A E D C **B** — Alle Permutationen mit B am fünften Platz liegen vorher: 2!= 2 Permutationen
F
G

A E D C F G
B — 1 Permutation

⇒ 417 Permutationen liegen vor der gegebenen Permutation ⇒ AEDCFGB ist die 418-te Permutation.

Beispiel 1.4
Die wievielte Permutation von ABCDE ist CDBAE?

Lösung:
Alle Permutationen mit A und B am ersten Platz liegen vor CDBAE, das sind 2.4! = 48 Permutationen.

Wenn nun C bereits am ersten Platz ist, so liegen noch alle Permutationen mit A und B am zweiten Platz vor CDBAE, das sind 2.3! = 12 Permutationen.

Wenn dann schon C am ersten und D am zweiten Platz sind, so liegen immer noch alle Permutationen mit A am dritten Platz vor CDBAE, das sind 2! = 2 Permutationen.

Die nächste Permutation ist dann CDBAE, also die 63-te Permutation.

Permutationen mit Wiederholung

Beispiel 1.5

Wie viele Permutationen gibt es von ABCCC?
Lösung:
Wir nummerieren zuerst die gleichen Elemente, um sie unterscheiden zu können: $ABC_1C_2C_3$

Von diesen n=5 Elementen gibt es 5!=120 Permutationen. Viele von ihnen sind aber gleich, wenn man die C's nicht unterscheidet, zum Beispiel:

$$\left.\begin{array}{l} ABC_1C_2C_3 \\ ABC_1C_3C_2 \\ ABC_2C_1C_3 \\ ABC_2C_3C_1 \\ ABC_3C_1C_2 \\ ABC_3C_2C_1 \end{array}\right\} = ABCCC$$

Oder z.B.:

$$\left.\begin{array}{l} AC_1BC_2C_3 \\ AC_1BC_3C_2 \\ AC_2BC_1C_3 \\ AC_2BC_3C_1 \\ AC_3BC_1C_2 \\ AC_3BC_2C_1 \end{array}\right\} = ACBCC$$

Oder z.B:

$$\left.\begin{array}{l} C_1ABC_2C_3 \\ C_1ABC_3C_2 \\ C_2ABC_1C_3 \\ C_2ABC_3C_1 \\ C_3ABC_1C_2 \\ C_3ABC_2C_1 \end{array}\right\} = CABCC$$

Oder z.B:

$$\left.\begin{array}{l} C_1AC_2C_3B \\ C_1AC_3C_2B \\ C_2AC_1C_3B \\ C_2AC_3C_1B \\ C_3AC_1C_2B \\ C_3AC_2C_1B \end{array}\right\} = CACCB$$

Man sieht: *Je* 6 Permutationen fallen *in eine Permutation zusammen*. Warum 6? Weil es t 3! = 6 Möglichkeiten gibt, die drei Elemente C_1,C_2,C_3 zu permutieren.
Wir haben also nicht 5! =120 Permutationen sondern 5! / 3! = 20 Permutationen.

Beispiel 1.6

Wie viele Permutationen gibt es von AAABBCCCCD? Lösung: $\dfrac{10!}{3!.2!.4!.1!}$

Permutationen von n Elementen zur k-ten Klasse

Beispiel 1.7
Gegeben sind n = 5 Elemente ABCDE. Wie viele Permutationen mit je k=3 Elemente kann man bilden?
Lösung

ABC	ABD	ABE	ACD	ACE	ADE	BCD	BCE	BDE	CDE
ACB	ADB	AEB	ADC	AEC	AED	BDC	BEC	BED	CED
BAC	BAD	BAE	CAD	CAE	DAE	CBD	CBE	DBE	DCE
BCA	BDA	BEA	CDA	CEA	DEA	CDB	CEB	DEB	DEC
CAB	DAB	EAB	DAC	EAC	EAD	DBC	EBC	EBD	ECD
CBA	DBA	EBA	DCA	ECA	EDA	DCB	ECB	EDB	EDC

Einfachere Lösung:
Wir haben n = 5 Elemente und k = 3 Plätze. Man hat 5 Möglichkeiten, den ersten Platz zu besetzen. Bei jeder dieser Möglichkeit bleiben für den zweiten Platz vier weitere Möglichkeiten und für den dritten Platz drei. Insgesamt haben wir

5.4.3 = 60 Möglichkeiten.

Man kann auch schreiben: $$5.4.3 = \frac{1.2.3.4.5}{1.2} = \frac{5!}{2!} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

Allgemein gilt:

Von n verschiedenen Elementen gibt es $P_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1)........(n-k+1)$ ***Permutationen zur k-ten Klasse.***

1.1.2 Kombinationen (Teilmengen)

Spielt die Reihenfolge bei den Permutationen zur k-ten Klasse keine Rolle, so erhält man Kombinationen zur k-ten Klasse, also alle Teilmengen mit k Elementen ($k \leq n$).

Beispiel 1.8

Im Beispiel 1.7 *fallen* dann wieder je 3! = 6 Permutationen in einer Teilmenge *zusammen,* so dass wir insgesamt

$\frac{5!}{(5-3)!.3!}=10$ Möglichkeiten haben. Hiefür gibt es das Symbol: $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!.(5-3)!}$

Allgemein gilt:

Von n verschiedenen Elementen gibt es $C_n^k=\binom{n}{k}$ Kombinationen.

Es gilt: $=\frac{n!}{k!.(n-k)!}=\frac{n.(n-1).....(n-k+1)}{k!}$

Beispiel 1.9
Gegeben sind n=7 Personen. Wie viele Gruppen zu je drei Personen kann man bilden (k=3)?
Lösung:
$\binom{7}{3}=\frac{7!}{3!.4!}=\frac{7.6.5}{1.2.3}=35$

1.1.3 Variationen

Gegeben sind n verschiedene Elemente. Wir möchten alle Permutationen zur k-ten Klasse bilden, wo bei sich aber jedes Element beliebig oft wiederholen darf. Die Möglichkeiten, die man dabei bekommt heißen *Variationen*.

Beispiel 1.10
a)Gegeben seien n = 3 Elemente 1, 2, 3. Dann lauten alle Variationen zur 2-ten Klasse:

11 12 13 21 22 23 31 32 33 Wir haben also 9 = 3^2 Variationen von 3 verschiedenen Elementen zur 2-ten Klasse

b) Gegeben seine nun die Elemente 1, 2, 3, 4. zur zweiten Klasse gibt es :

11 12 13 14 21 22 23 24 31 32 33 34 41 42 43 44, das sind 4^2 = 16 Variationen.

Allgemein geht man so vor:
Man hat Elemente k≤n Plätze: Für den ersten Platz hat man n Möglichkeiten, um ihn zu besetzen. Bei jeder dieser Möglichkeiten gibt es für den zweiten Platz wieder n Möglichkeiten, was zusammen bereits n^2 Möglichkeiten ausmacht. Für jede dieser n^2 Möglichkeiten gibt es für den dritten Platz wieder n neue Möglichkeiten, also bereits n^3 Möglichkeiten. Insgesamt gibt es n^k Möglichkeiten.

Von n verschiedenen Elementen gibt es $V^k_n = n^k$ Variationen zur k-ten Klasse.

Beispiel 1.11
Wie viele dreistellige Kraftfahrzeugkennzeichen können wir mit den 26 Buchstaben des Alphabets bilden?

Lösung: n=26, k=3 Man bekommt V^6 $V^3_{26} = 26^3$

AAA AAB ABA BAA AAC ....ZYZ YZZ ZZZ

1.1.4 Kombinationen mit Wiederholung

Beispiel 1.12
Aus den Elementen ABC (n=3) sollen Gruppen zu je 2 Elementen (k=2) gebildet werden, wobei jedes Element beliebig wiederholt werden darf aber die Reihenfolge keine Rolle spielt.
AA AB AC BB BC CC
Bei größerem n und k wird das Problem schwieriger:

Beispiel 1.13
Aus den Elementen ABCDEF (n=6) sollen Gruppen zu je 4 Elementen (k=4) gebildet werden, wobei jedes Element beliebig wiederholt werden darf aber die Reihenfolge keine Rolle spielt.

Wir haben n= 6 Elemente und k = 4 Plätze und betrachten einige von vielen Möglichkeiten.

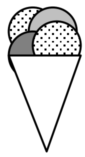
AAAB:
A hat drei Plätze, B hat einen Platz, die anderen Elemente haben keinen Platz. Wir schreiben nacheinander die sechs Elemente an und denken uns zwischen zwei Elementen einen Strich. Da A drei Plätze hat, schreiben wir unter den Buchstaben A drei Sterne. B hat einen Platz, also schreiben wir unter B einen Stern. Es entsteht eine Folge von Sternen und Strichen. Diese Folge besteht aus

A B C D E F
*** I * I I I I Der * steht an der Stelle {1,2,3,5}

ADDF
* I I I ** I I * Der * steht an der Stelle {1,5,6,9}

BEEE
I * I I I *** I Der * steht an der Stelle {2,6,7,8}

Für die rechts in geschwungener Klammer stehenden Elemente gilt:
Es gibt k = 4 Plätze,
Es gibt 9 Elemente (k = 4 Sterne (*) und n-1 =6-1= 5 Striche zwischen den Elementen A,B,C,D,E jedes Element kommt nur ein mal vor
die Reihenfolge der Elemente in den Klammern ist gleichgültig ({1,5,6,9} bedeutet dasselbe wie etwa {6,1,5,9}).
Wir haben es daher mit *Kombinationen* zu tun und es gibt



$$\binom{6+4-1}{4} = \binom{9}{4} = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} = 126 \text{ Möglichkeiten.}$$

(Verwechseln Sie nicht Anzahl und Art der ursprünglich *gegebenen* n = 6 Elemente A,B,C,D,E mit den Elementen in den geschwungenen Klammern: 1,2,3,4,5,6,7,8,9!)

Allgemein gilt:

Von n verschiedenen Elementen gibt es $C_{n+k-1}^{k} = \binom{n+k-1}{k}$ ***Kombinationen mit Wiederholung***

Beispiel 1.14

Ein Eissalon bietet 10 Sorten Eis an. Zum Preis von 2€ darf man sich 4 Kugeln auswählen, wobei auch mehrere Male dieselbe Sorte gewählt werden kann. Wie viele Wahlmöglichkeiten hat man, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt?
Lösung: Kombinationen mit Wiederholung n=10 Elemente (Eissorten), k = 4 Sorten werden ausgewählt. Man hat $\binom{n+k-1}{k} = \binom{13}{4} = \frac{10 . 11 . 12 . 13}{1 . 2 . 3 . 4} = 715$ Möglichkeiten der Auswahl.

Übersicht - Elementare Kombinatorik

Aus n verschiedenen Elementen werden k≤n Elemente ausgewählt

Bezeichnung	Merkmal	Anzahl der Möglichkeiten
Permutationen	Reihenfolge wichtig Keine Wiederholung	$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1)....(n-k+1)$
Variationen	Reihenfolge wichtig Jedes Element wiederholt sich bis zu k mal	$V^k{}_n = n^k$
Kombinationen	Reihenfolge unwichtig Keine Wiederholung	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$
Kombinationen mit Wiederholung	Reihenfolge unwichtig Jedes Element wiederholt sich bis zu k mal	$C_{n+k-1}^{k} = \binom{n+k-1}{k}$
Sonderproblem: Permutationen mit fixer Wiederholung	Reihenfolge wichtig Jedes Element wiederholt sich genau eine bestimmte Zahl mal	Siehe Seite 3!

Aufgaben:
1.1) Unter 20 Teilnehmern einer Party werden drei Preise verlost (erster Preis, zweiter Preis, dritter Preis). Jeder kann nur einen Preis gewinnen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
1.2) Unter 20 Teilnehmern einer Party werden drei gleiche Preise verlost. Jeder kann nur einen Preis gewinnen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
1.3) Wie viele Anordnungen gibt es von den Buchstaben des Wortes a) MISSISSIPPI ? b) MOHAMMED c) NEDWED ?
1.4) 20 Mitglieder eines Vereins wählen einen Vorstand, einen Stellvertreter und einen Kassier. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür.
1.5) 10 Leute wollen noch eine Kinokarte. Es gibt noch drei Plätze, sie kosten gleich viel, man kann sitzen wo man will. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei Personen aus den zehn Personen auszuwählen?
1.6) 10 Leute wollen eine Kinokarte. Es gibt noch drei Plätze, einen zu 4€ einen zu 5€ und einen zu 7€. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei Personen aus den zehn Personen auszuwählen?
1.7) Wie viele Vektoren im dreidimensionalen Raum kann man mit den natürlichen Zahlen 1 ,2, ...10 bilden?
1.8) Auf einer Party sind 15 Personen eingeladen. Jeder stößt mit jedem die Gläser an. Wie viele „Stöße“ gibt es?
1.9) Wie viele Diagonalen hat ein n-Eck. (Eine Diagonale ist die Verbindung zweier nicht benachbarter Seiten)
1.10) Wie viele verschiedenen Autonummern kann man a) mit 6 Ziffern. b) mit 6 Buchstaben c) mit drei Ziffern und 3 Buchstaben bilden
1.12) Beantworten Sie Frage 8c) für den Fall, dass die Buchstaben immer nach den Ziffern kommen.
1.13)20 Personen wollen mit einem Kleinbus fortfahren. Es haben aber nur 16 Personen Platz. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 16 Personen auszuwählen.
1.14) Gegeben sind 5 Punkte im Raum. Wie viel Dreiecke kann man bilden, deren Eckpunkte aus den fünf Punkten genommen sind?
1.15) In einem Restaurant gibt es 5 Vorspeisen, 10 Hauptspeisen und drei Nachspeisen . Wie viele Menüs können Sie daraus zusammenstellen, wenn Sie
a) aus jeder Kategorie nur eine Speise wählen dürfen?
b) je zwei verschiedene Vorspeisen und Hauptspeisen und eine Nachspeise wählen dürfen?
c) drei verschiedene Vorspeisen, vier Hauptspeisen und zwei Nachspeisen wählen dürfen
d) Insgesamt vier Speisen wählen dürfen?
1.16) Student X muss am Vorstudienlehrgang Abschlussprüfungen aus 5 Fächern ableben. Er möchte 3 Fächer zum Februartermin und zwei Fächer zum Märztermin absolvieren. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Fächer für die beiden Termine auszuwählen.
1.17) Ein Lichterkette für einen Christbaum enthält 20 elektrische Kerzen in Hintereinanderschaltung. 2 Kerzen sind gleichzeitig ausgefallen (kaputt). Wie viele Kerzenpaare müssen Sie maximal überprüfen, um die fehlerhaften Kerzen herauszufinden?
1.18) In einem „Running-Sushi-Restaurant“ laufen auf einem Förderband 10 verschiedene Speisen. Zum Preis von 6.90€ darf man sich fünf man beliebig bedienen, wobei man auch mehrmals dieselbe speise wählen darf. Wie viele Möglichkeiten gibt es.
1.19) An einer Fußballmeisterschaft nehmen 8 Städte teil: Wie viele Spiele gibt es, wenn jede Stadt gegen alle anderen spielt.
1.20) Bei der Fußballweltmeisterschaft gibt es 8 Gruppen mit je 4 Ländern. Innerhalb einer Gruppe spielt zuerst(in der sogenannten Vorrunde) jedes Land gegen alle anderen Gruppenmitglieder. Wie viele Spiele gibt es in der Vorrunde.
1.21) Für 30 Studenten stehen drei Stipendien zu je 1000€ zur Verfügung. Da alle Studenten ungefähr gleiche Leistungen erbringen, müssen die Stipendien zufällig verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?
1.22) Für 30 Studenten stehen je ein Stipendium zu 1000€, 1500€ und 2000€ zur Verfügung. Da alle Studenten ungefähr gleiche Leistungen erbringen, müssen die drei Stipendien zufällig verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?
1.23) Unter 20 Teilnehmern einer Party werden drei Preise verlost (erster Preis, zweiter Preis, dritter Preis). Da jeder Teilnehmer mehr als drei Lose gekauft hat kann man beliebig viele Preise gewinnen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
1.24) Unter 20 Teilnehmern einer Party werden drei Preise (je dieselbe Flasche Wein) verlost. Da jeder Teilnehmer mehr als drei Lose gekauft hat kann man beliebig viele Preise gewinnen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

1.2 Wichtige Anwendungen

1.2.1 Unterteilung einer Menge in Teilmengen

Beispiel 1.15
Vierzehn Studenten haben sich zur Prüfung angemeldet. Es stehen drei Prüfungsräume zur Verfügung. Einer der Räume fasst 6 Personen, der zweite fünf und der dritte drei Personen. Wie viel Möglichkeiten gibt es, die 14 Studenten in drei Gruppen für die drei Räume aufzuteilen?
Lösung:

Für die erste Gruppe gibt es $\binom{14}{6} = 3003$ Möglichkeiten, um sie zu bilden.

Bei *jeder* dieser Möglichkeiten gibt es für die zweite Gruppe $\binom{8}{5} = 56$ Möglichkeiten. Das macht zusammen

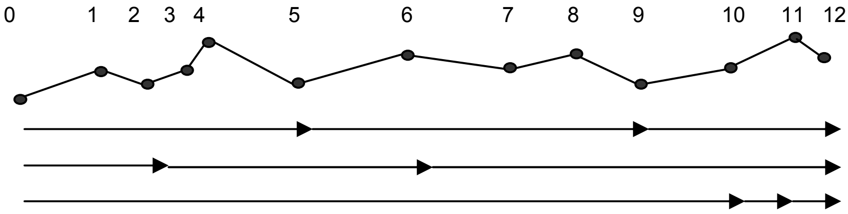
3003.56=168168 Möglichkeiten.

Für *jede* dieser Möglichkeiten gibt es für die letzte Gruppe $\binom{3}{3} = 1$ Möglichkeit.

die Gesamtlösung ist also: $\binom{14}{6}.\binom{8}{5}.\binom{3}{3} = C_{14}^{6}.C_{8}^{5}.C_{3}^{3} = 168168$.

1.2.2 Unterteilung einer ganz-zahligen Strecke in Teilstrecken

Beispiel 1.16
Gegeben ist ein so genannter *Streckenzug*, der aus n= 12 Elementen besteht, etwa eine Bahnstrecke mit n = 12 Teilstrecken also n+1 =13 Bahnhöfen (Null bis Zwölf). Man soll den Streckenzug in drei Teilstrecken (k=3) unterteilen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?
Lösung:
In der Abbildung sind Beispiele für die gewählten Teilstrecken eingezeichnet, und daneben die Teilungspunkte angeführt, die sich dadurch ergeben:



Teilungspunkte: {5,9}

Teilungspunkte: {2,6}

Teilungspunkte: {10,11}

Die Klammern mit den Teilungspunkten enthalten je zwei Elemente (bei drei Teilstrecken gibt es zwei Teilungspunkte).
Diese werden aus 11 Elementen (1,2,……11) ausgewählt, nämlich aus allen möglichen Punkte mit Ausnahme der Randpunkte. Die Reihenfolge spielt keine Rolle (es bedeutet zum Beispiel {5,9} dasselbe wie {9,5}), daher handelt es sich um *Kombinationen.* Wir haben daher $\binom{12-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$ Möglichkeiten.

1.2.3 Ziehen mit und ohne Zurücklegen

Ziehen ohne Zurücklegen

In einer *Urne* befinden sich n verschiedene Kugeln, die nummeriert sind. Wir ziehen k mal und schreiben das Ergebnis auf. Wir legen die Kugeln nicht mehr in die Urne zurück. Wie viele verschiedene Ergebnisse kann man dabei bekommen?

Lösung:
Wir haben n verschiedene Elemente und k Plätze
a) Wenn die Reihenfolge eine Rolle spielt handelt es sich um Permutationen und es gibt

$$P^k_n = n.(n-1). \quad (n-k+1)$$

verschiedene Ergebnisse.

b) Spielt die Reihenfolge keine Rolle, so haben wir Kombinationen und es gibt

$$C^k_n = \binom{n}{k}$$

verschiedene Ergebnisse.

Ziehen mit Zurücklegen

Legt man die Kugeln nach jedem Zug zurück, so kann sich jedes Element bis zu n mal wiederholen.
a) Spielt die Reihenfolge eine Rolle, so haben wir Variationen erzeugt, es gibt

$$V^k_n = n^k$$

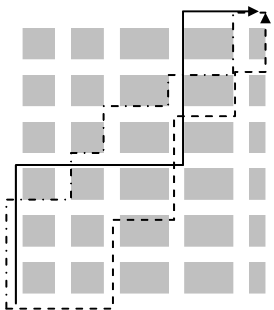
verschiedene Ergebnisse.

b) Spielt die Reihenfolge keine Rolle, so haben wir *Kombinationen mit Wiederholung* erzeugt, es gibt

$$\binom{n+k-1}{k}$$

verschiedene Ergebnisse.

1.2.4 Manhattan-Problem



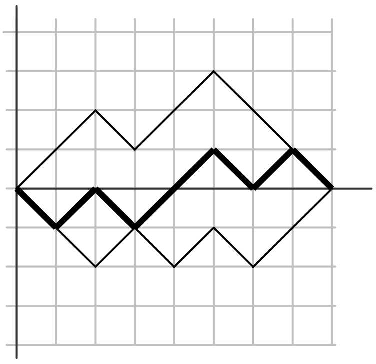
Beispiel 1.17
Die Abbildung zeigt drei verschiedenen Wege (Trajektorien), auf welchen man in Manhattan vom Ausgangspunkt (0 I 0) zum Endpunkt (5 I 6) gelangen kann. Wie viele verschiedene solcher Wege gibt es?
Lösung: Da alle Straßen zueinander normal stehen, kann man jeden Weg aus den 5 Basisvektoren ***i*** **=** (1 I 0) und 6 Basisvektoren ***j*** **=** (0 I 1) zusammen setzen. Das sind insgesamt 5 + 6 = 11 Teilvektoren $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots\ldots\ldots \boldsymbol{a_{11}}$. Wir schreiben nun in Form eines Tupels nur die Abfolge der Vektoren auf

Trajektorie 1 (gezogene Linie) : ***j,j,j,i,i,i,j,j,j,i,i*** ***j*** steht an der Stelle (1,2,3,7,8,9)
Trajektorie 2: (gestrichelt) ***i,i,j,j,i,j,j,i,j,j,i*** ***j*** steht an der Stelle (3,4,6,7,9,10)
Trajektorie 3: (strich-punktiert) ***j,j,i,j,i,j,i,j,i,i,j*** ***j*** steht an der Stelle (1,2,4,6,8,11)

Die 6-Tupel ganz rechts sind Kombinationen zur 6-ten Klasse aus 11 Elementen.

Exkurs: Das Theaterkassenproblem

Beispiel 1.18
An einer Theaterkasse stehen 2.n Personen. Eine Karte kostet 5€. Der Kassier hat kein Wechselgeld. Die Hälfte der Wartenden, also n Personen haben genau je 5€ in der Tasche, die andere Hälfte hat genau je 10€. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass niemand auf sein Wechselgeld warten muss.
Lösung:
Man stellt das Problem im x-y-Koordinatensystem dar:
Wenn ein 5€-Käufer an die Reihe kommt, zeichnen wir den Vektor ***a*** = (1|-1),
wenn ein 10€-Käufer an die Reihe kommt zeichnen wir den Vektor ***b*** =(1|1).
Wir bilden eine sogenannte „Trajektorie" aus allen Vektoren, indem wir sie einfach - wie bei Vektorsummen - hintereinander anfügen.
Die Trajektorie soll in (0 | 0) beginnen. Da es jeweils n Vektoren $\vec{a}$ und n Vektoren $\vec{b}$ gibt, endet die Trajektorie immer in (2n | 0):

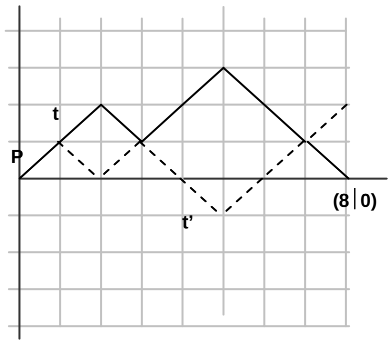


Die Abbildung zeigt drei solcher Trajektorien für den Fall n=4, welche in (0|0) beginnen und in (8|0). enden

Insgesamt gibt es $\binom{2n}{n}$ verschiedene Trajektorien, da es ebenso viele Möglichkeiten gibt, n Vektoren $\vec{a}$ aus insgesamt 2n Vektoren auszuwählen.

Frage:
Bei welchen Trajektorien müssen die Theaterkunden auf Wechselgeld warten?

Das ist bei jeder Trajektorie der Fall, die irgendwo zumindest einmal die „Höhe" y = 1 erreicht.
Wie viele solcher Trajektorien gibt es nun?
Um solche Trajektorien von den anderen unterscheiden zu können spiegeln wir sie ab dem „Erreichen" der Höhe y =1 an der horizontalen Geraden y = 1. Die Abbildung zeigt eine Trajektorie t (Sie endet in (2n|0)) und die gespiegelte Trajektorie t' (bis P verläuft sie gleich mit t, ab P ist sie das Spiegelbild von t bezüglich der Geraden y = 1,sie endet in (2n/2)).
Wie viele Trajektorien t gibt es nun, die eine Trajektorie t' haben: Antwort: genau $\binom{2n}{n-1}$ Trajektorien, weil die Trajektorien t 'nur n-1 Vektoren $\vec{a}$ haben und es daher $\binom{2n}{n-1}$ Möglichkeiten gibt, diese aus den insgesamt 2n Vektoren auszuwählen.



Ergebnis: es gibt $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ Möglichkeiten, bei denen die Theaterkunden *nicht* auf das Wechselgeld warten müssen.

1.2.5 Verteilung von Teilchen auf Zellen

Verteilung von verschiedenen Teilchen auf verschiedene Zellen

Allgemeines Problem:

Man soll n verschiedene Teilchen auf k verschiedene Zellen verteilen, die ganzen Zahlen n und k seien frei wählbar. Bei der Verteilung ist alles erlaubt (es können beispielsweise Zellen leer bleiben oder auch mehrere Teilchen in eine Zelle gelegt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Für das erste Teilchen gibt es k Möglichkeiten (es kann in jede der k Zellen gelegt werden), für das zweite Teilchen wieder k Möglichkeiten und so weiter. Insgesamt gibt es daher

$$V^n_k = k^n$$

Möglichkeiten (Variationen)

Bemerkung:

Ist die Verteilung nicht beliebig, sondern soll in jede Zelle höchstens ein Teilchen gelegt werden, so gilt $n \leq k$ und wir haben für das erste Teilchen k Möglichkeiten, für das zweite jedoch nur mehr k-1 Möglichkeiten, für das dritte Teilchen k-2 Möglichkeiten und für das letzte Teilchen k-n+1 Möglichkeiten. Zusammen ergibt das

$$P^n_k = k(k-1).....(k-n+1)$$

Möglichkeiten (Permutationen)

Beispiel 1.19

Die Studenten Rafik, Batik und Mantik erscheinen im Sekretariat am Vorstudienlehrgang und möchten sich für einen Anfängerkurs anmelden. Es gibt genug Plätze in den fünf Anfängerkursen A, B, C, D, E und die Sekretärin soll die die Studenten auf die Kurse aufteilen. Wie viele Möglichkeiten hat sie, wenn sie
a) die Studenten beliebig aufteilen darf (also auch mehrere Studenten in denselben Kurs)?
b) in jeden Kurs höchstens einen Studenten einweisen darf?

a)Die Tabelle zeigt fünf mögliche Aufteilungen, wie viele gibt es aber wirklich?

Kurs	A	B	C	D	E
Beispiel	_	Mantik, Batik, Rafik	-	-	-
Beispiel	Mantik	-	Rafik, Batik	-	-
Beispiel	-	-	Rafik	Batik	Mantik
Beispiel	-	-	Batik	Rafik	Mantik
Beispiel	Rafik	-	-	-	Batik, Mantik

Tabelle 1

Lösung
In dieser Aufgabe werden n=3 Teilchen (die drei Studenten) auf k=5 Zellen (die fünf Anfängerkurse) *beliebig* verteilt. Man hat daher

$$V^n_k = V^5_3 = 5^3 = 125 \text{ Möglichkeiten.}$$

b) Darf die Sekretärin in jeden Kurs höchstens einen Studenten einweisen, so ergeben sich

$$P^n_k = P^3_5 = 5.4.3 = 60 \text{ Möglichkeiten.}$$

Verteilung von gleichen Teilchen in verschiedene Zellen

Man soll n gleiche Teilchen auf k verschiedene Zellen verteilen, n und k seien beliebige natürliche Zahlen. Bei der Verteilung ist alles erlaubt (es können beispielsweise Zellen leer bleiben oder auch mehrere Teilchen in eine Zelle gelegt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Wir zeigen die Lösung an einer Aufgabe:

Beispiel 1.20
Wir haben n = 4 gleiche Kugeln und k = 6 Plätze A, B, C, D, E. Einige Möglichkeiten seien angeführt.
Es können z.B. alle vier Teilchen auf Platz A sein. Dies beschreibt man durch: AAAA
Es kann ein Teilchen auf A, eines auf B und zwei auf C sein. Dies beschreibt man durch: ABCC
Es kann ein Teilchen auf D und drei Teilchen auf B sein. BBBD

Offensichtlich gilt: ABCC = BACC = CABC usw, auch gilt BBBD = BDBB = …… die Reihenfolge spielt also keine Rolle. Die angeführten Beispiele sind also *Kombinationen mit Wiederholung.* Daher gibt es

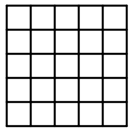
$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{9}{4} = \frac{6.7.8.9}{1.2.3.4} = 126$$

Möglichkeiten

Übungsaufgaben

1.21) Ein Kurs von 20 Studenten soll in zwei Fünfergruppen, eine Vierergruppe und zwei Dreiergruppen aufgeteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? [$C^{5}_{20}.C^{5}_{15}.C^{4}_{10}.C^{3}_{6}$]
1.22) 18 Studenten sollen an drei Tagen geprüft werden. Jeden Tag gleich viele Studenten. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Prüfungseinteilung [$C^{6}_{18}.C^{6}_{12}$]
1.23) Eine Eisenbahnlinie von A nach B hat insgesamt (inklusive Anfangs- und Endstation) 14 Stationen
a) Wie viele verschiedene Fahrkarten von einem Bahnhof zu einem anderen gibt es? [$2.C^{2}_{14}$]
b) Sie fahren von A nach B und dürfen die Fahrt dreimal unterbrechen. Wie viel Reiserouten können sie damit zusammenstellen? [C^{3}_{13}]
1.24) 3 Personen arbeiten in einem Büro. In ihrem Zimmer ist ein Schrank mit 7 Schubladen. Jede Person muss mindestens eine Schublade zur Verfügung haben. Die restlichen Schubladen kann der Chef frei unter den 3 Angestellten aufteilen. Wie viele Möglichkeiten hat er dafür. [15]
1.25) In einer Urne sind 5 verschiedene Kugeln. Sie ziehen dreimal mit Zurücklegen, wobei die Reihenfolge **eine** Rolle spielen soll. Wie viele Möglichkeiten können sich ergeben? [125]
1.26)) In einer Urne sind 5 verschiedene Kugeln. Sie ziehen dreimal mit Zurücklegen, wobei die Reihenfolge **keine** Rolle spielt. Wie viele Möglichkeiten können sich ergeben? [21]
1.27) In einer Urne sind 5 verschiedene Kugeln. Sie ziehen dreimal **ohne** Zurücklegen, wobei dieReihenfolge **eine** Rolle spielt. Wie viele Möglichkeiten können sich ergeben? [60]
1.28) In einer Urne sind 5 verschiedene Kugeln. Sie ziehen dreimal **ohne** Zurücklegen, wobei die Reihenfolge **keine** Rolle spielt. Wie viele Möglichkeiten können sich ergeben? [10]
1.29^{+}) Sie haben einen 20€ Schein, eine 2€ Münze und eine 1€ Münze. Vor Ihnen stehen drei Bettler, denen Sie das Geld geben sollen. Sie können das Geld beliebig auf die Bettler verteilen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? [27]
1.30) Beantworten Sie Frage 9) wenn sie a)drei 2€ Münzen haben! [10] b) vier 2€ Münzen haben! [20]

1.31) Wie viele Trajektorien gibt es zwischen dem Ursprung und dem Punkt A, wenn als Elemente der Trajektorie ausschließlich die Vektoren ***r*** = (1I 0) und ***s*** = (0 I 1) verwendet werden dürfen. Setzen Sie für den Endpunkt A der Trajektorie:
a) A = (5 I 0) [1]   b) A = (5 I 5) [252]   c) A = (5 I 3) [56]   d) A = (5 I 4) [1260]

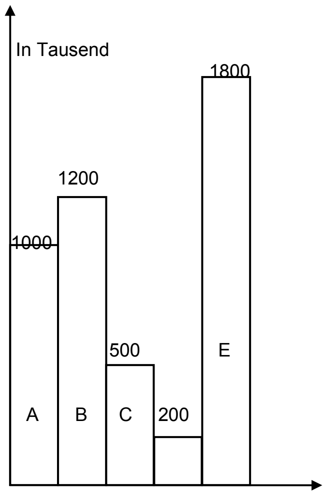


1.32) Verwenden Sie in Aufgabe 1.31 als Elemente der Trajektorie die Vektoren ***r*** = (1 I 1) und ***s*** = (1 I –1)

1.33) Ein Geschäft für Speiseeis bietet 20 verschiedene Sorten Eis an. Zum Preis von 1,50€ dürfen sie drei Sorten frei auswählen, wobei sie auch mehrmals die gleiche Sorte wählen können. Wie viele Wahlmöglichkeiten gibt es? [1540]
1.34) Auf einer Charity-Party sind 100 Gäste eingeladen. Jeder Gast kauft 5 Lose. Am Ende werden drei Lose gezogen. Jedes Los bedeutet einen Gewinn. Wie viele Ergebnisse kann es bei dieser Ziehung geben? [171700]

1.35) Im Sushi-Restaurant laufen zwei Bänder: Auf Band I werden fünf verschiedene Fischhappen angeboten und auf Band II sieben verschiedene Gemüsehappen. Wie viele Wahlmöglichkeiten hat man, wenn man 6 Stück von band I und 8 Stück von Band II frei wählen darf? [864864]

1.36) Ein Weinhändler bietet 100 Verschiedene Sorten Wein an. Student A kauft 10 Flaschen. Wie viel Auswahlmöglichkeiten hat er,
a) wenn er 10 verschiedene Weine kauft?   b) wenn es gleichgültig ist, ob eine Weinsorte mehrmals vorkommt?



Exkurs: Grundbegriffe der Statistik

Grundgesamtheit, Verteilung und Stichprobe

Grundgesamtheit (population)

Beispiel: Wahlergebnis

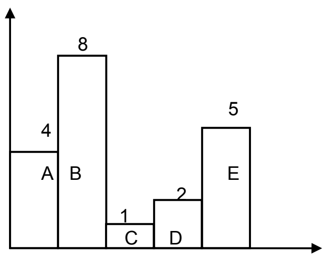
Die Tabelle zeigt die *Häufigkeitsverteilung* der abgegebenen Stimmen von *allen Wählern* in einem Land. *Alle diese Wähler* bilden zusammen die *Grundgesamtheit*. Die geordneten Daten über Eigenschaften der Grundgesamtheit nennt man *Verteilung*.

Partei	A	B	C	D	E	Gesamt
Häufigkeit (abgegebene Stimmen)	1 000 000 (21,27%)	1 200 000 (25,23%)	500 000 (10,7%)	200 000 (4,5%)	1 800 000 (38,3%)	4 700 000

Stichprobe (sample)

Eine Zeitung macht eine Umfrage unter 20 Gästen eines Restaurants und stellt die Frage: „ Wen haben sie gewählt. Die Zeitung *zieht eine Stichprobe **aus** der Grundgesamtheit.* Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung der abgegebenen Stimmen in der Stichprobe. Stichprobenumfang: 20 befragte Personen.

Partei	A	B	C	D	E	Stichproben umfang
Häufigkeit (abgegebene Stimmen)	4 (20%)	8 (40%)	1 (5%)	2 (10%)	5 (25%)	20



In diesem Beispiel gibt es Unterschiede zwischen den Verteilungen der *Grundgesamtheit* und der *Stichprobe*.

Ist die Verteilung der Grundgesamtheit durch mathematische Formeln bestimmt, so kann in vielen Fällen ein Zusammenhang zwischen Stichprobenverteilung und Verteilung der Grundgesamtheit gefunden werden. Dies ist eine der Hauptaufgaben der Statistik.

Häufigkeitsverteilung einer Variablen (Zufallsvariablen)

Als Einführungsbeispiel betrachten wir die relativen Häufigkeiten der Prüfungsnoten von N=2000 Studenten (= Grundgesamtheit) in einer Tabelle.

- Die *Variable x* ist die Prüfungsnote: x € {0,1,2,3,4,5}
- Die Häufigkeit von x nennen wir n (n_1 ist die Häufigkeit von x_1 , usw. ....)
- Die *relative* Häufigkeit von x nennen wir r ($r_1 = n_1/N = n_1 / \Sigma n_i$, usw. ....)

Punkte (Variable x)	Häufigkeit n_i	Kumulierte Häufigkeit	relative Häufigkeit r_i		Kumulierte relative Häufigkeit
x_1=0	n_1=300	300	r_1 =0.15	15%	15%
x_2=1	n_2=200	500	r_2 =0.10	10%	25%
x_3=2	n_3=600	1100	r_3 =0.30	30%	55%
x_4=3	n_4=500	1600	r_4 =0.25	25%	80%
x_5=4	n_5=300	1900	r_5 =0.15	15%	95%
x_6=5	n_6=100	2000	r_6 =0.05	5%	100%
	N=2000		Summe = 1	$\Sigma = 100\%$	

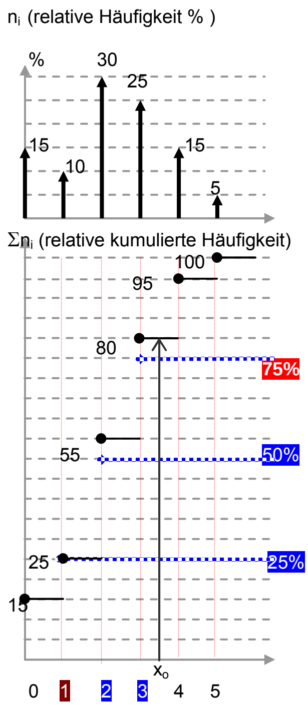
Die kumulierte Häufigkeit von x_i ist: $$\mathbf{h_i = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_i}$$

Die ***relativen Häufigkeiten*** erhält man, wenn man die gewöhnlichen Häufigkeiten durch ihre Gesamtsumme N = n_1+n_2+...... dividiert. Es ergibt sich dann die jeweilige Häufigkeit *in Prozent.*

$$r_i \;=\; n_i \,/\, N$$

Die Summe aller relativen Häufigkeiten muss 1 (100%) ergeben.

Die Abbildung zeigt oben den Graphen der ***relativen Häufigkeit*** und darunter den Graphen der ***kumulierten relativen Häufigkeit.*** Das ist die Summe der Häufigkeiten für alle Variablen ≤ x



$$\Sigma r_i = 1$$

Es ergibt sich eine monoton steigende Funktion, deren letzter (höchster) Wert gleich 1 sein muss (100%). Dies erlaubt eine übersichtliche Bestimmung der sogenannten Quantile (Percentile).

p-Percentil einer Verteilung:

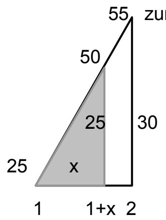
*Das p-Percentil ist jener Wert der Variablen x , deren kumulierte **relative** Häufigkeit gleich p ist.*

Beispiel:
Das 25-Percentil ist der Wert x=1, weil 25% aller Studenten 1 oder weniger Punkte haben.
Das 80-Percentil ist der Wert x= 3, weil 80% der Studenten 3 oder weniger Punktre haben
Das 50-Percentil existiert in unserer Statistik eigentlich nicht, da es keine Summe von relativen Häufigkeiten gibt, die zusammen 50% ergeben. Das nächste niedrigere Percentil ist bei 25% , das nächste höhere bei 55%. Die 50% - Marke teilt den Abstand zwischen den beiden Percentilen im Verhältnis 25:30 = 5:6 = 0,83. Daher kann man das 50 -Percentil mit 1+0,83=1,83 angeben.

Das 75-Percentil teilt den Abstand zwischen den beiden „Nachbarpercentilen“ im Verhältnis 20:25 = 0,8, daher liegt das 75-Percentil bei 2,8

Median einer Verteilung

Der Median ist das 50-Percentil.



zur Berechnung des 50-Percentils

$x/25 = (2-1) / 30$

$\Rightarrow \; x = 0{,}83$

Median einer Stichprobe

Bei kleinem Stichprobenumfang ist es praktisch unmöglich mit der eben gelernten Methode einen vernünftigen Median zu finden.
Man bestimmt daher den Stichprobenmedian auf andere Weise
Man unterscheidet zwischen geradem und ungeradem Stichprobenumfang:

Gerader Stichprobenumfang: Angenommen, eine Stichprobe von 10 Schülern ergibt folgende Schulnoten.

Note	1	2	3	4	5
Häufigkeit	2	0	4	3	1

Man schreibt alle Schulnoten geordnet nach ihrer Größe auf und zwar jede so oft, wie es ihrer Häufigkeit entspricht

1 1 3 3 3 3 4 4 4 5

Nun ermitteln wir diejenige Note, für welche 50% aller Noten gleich oder kleiner sind. Dies ist im Beispiel die Zahl 3

Ungerader Stichprobenumfang: N = 11

Note	1	2	3	4	5
Häufigkeit	2	5	1	1	2

Man schreibt alle Schulnoten geordnet nach ihrer Größe auf und zwar jede so oft, wie es ihrer Häufigkeit entspricht

1 1 2 2 2 2 2 3 4 5 Der Median ist 2 (die Zahl in der Mitte der 11 Zahlen)

Mittelwert und Standardabweichung:

Mittelwert $\langle x\rangle = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum n_i x_i = \sum r_i x_i$

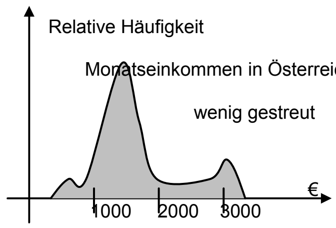
Abweichung
der Größe x_i vom Mittelwert $\Delta x_i = x_i - \overline{x}$

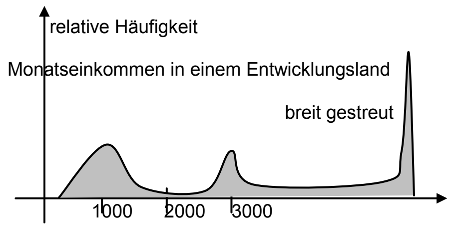
Quadrat der Abweichung $(\Delta x_i)^2$

Standardabweichung

(=mittleres Quadrat der Abweichung) $s^2 = \frac{1}{N}\sum n_i (\Delta x_i)^2$ =(Formel)= $\frac{1}{N}\sum n_i x_i^{\,2} - \overline{x}^2$ (*)

Die Standardabweichung s ist eine Information über die sogenannte **Streuung** der Variablen x_i .





Beispiel:

Punkte (Variable x)	Häufigkeit	x^2	Δx	Δx^2
$x_1=0$	$n_1=3$	$x_1^2=0$	Δx_1 = 0-2,3 = -2,3	$\Delta x_1^2 = (-2,3)^2 = 5,29$
$x_2=1$	$n_2=2$	$x_2^2=1$	Δx_2 = 1-2,3 =- 1,3	
$x_3=2$	$n_3=6$	$x_3^2=2$		
$x_4=3$	$n_4=5$			
$x_5=4$	$n_5=3$			
$x_6=5$	$n_6=1$			
	N=20			

Mittelwert: $\langle x\rangle$ = {0.3 + 1.2 + 2.6 + 3.5 + 4.3 + 5.1} / 20 = 46 / 20 = 2,3

Standardabweichung: Füllen Sie die Tabelle unten selbst aus und berechnen Sie s auf beide Arten!

Bemerkung:
Bei statistischen Testverfahren benutzt man oft die *„Stichprobenstandardabweichung"*. Für diese gilt die Formel mit N -1 statt mit N., also:

$s^2 = [\,\sum n_i x_i^2 - \langle x\rangle^2\,] / (N-1)$ Wir werden sie erst später benutzen.

3. Gruppierte Daten -

Beispiel:

Temperatur	0-4 Grad	5-9 Grad	10-14 Grad	15-19 Grad	20-24 Grad	25-29 Grad	30-34 Grad
Anzahl der Tage	50	40	60	80	50	20	15

Sogenannte Klassenbreiten (Gruppenradius) R = 5
Position der Gruppe (wenn R = const): Mittelwert der Gruppe: zB. vierte Gruppe:T_4=(19-15)/2=17

T	2	7	12	17	22	27	32
Anzahl der Tage	50	40	60	80	50	20	15

Aufgaben
E.1) Gegeben ist jeweils eine Häufigkeitstabelle (Urliste). Verfahren Sie mit dieser so wie mit obigem Beispiel!
a)

Studenten	5	7	8	2	3	4	5
Alter	19	20	22	23	25	26	27

b)

Alter	0-7	8-16	16-23	24-31	32-39	40-47	48-53
erkrankte Personen	2	6	23	111	167	28	6

E.2) Variable x $\in$ {1,2,3,....,10}. Häufigkeit von x_i: $n(x_i)=\binom{10}{i}$ .Berechnen Sie alle wichtigen statistischen Größen!

E.4) Beweisen Sie die Formel (*) für die Standardabweichung!
E.5) Beweisen Sie: „Die mittlere Abweichung vom Mittelwert ist immer gleich Null"!

2. Die Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiel 2.1
Wir werfen eine Münze: Die Ergebnisse lauten *Zahl* (Z) und *Kopf* (K)

Wenn wir 10 mal werfen und dabei 10 Mal *Kopf* bekommen (Null mal *Zahl*), so ist dies möglich aber *unwahrscheinlich.*

Werfen wir tausend mal und bekommen wir 1000 Mal *Kopf*, so ist dies ebenfalls möglich aber *sehr unwahrscheinlich*. Viel *wahrscheinlicher* wären relative Häufigkeiten von ungefähr 50% *Köpfen* und ungefähr *50% Zahlen.*

Erst wenn wir *unendlich oft* werfen werden wir je 50% Köpfe und Zahlen erhalten, Wir sagen:

Die Wahrscheinlichkeit für das Ergebnis *Kopf* ist: p(*Kopf*) = 0,5

Beispiel 2.2
In einer Urne gibt es drei rote und eine weiße Kugel.

Wenn wir 100 Mal mit Zurücklegen ziehen und dabei 99 Mal die weiße Kugel ziehen, so ist dies möglich aber wieder *wenig wahrscheinlich.* Viel wahrscheinlicher wäre eine relative Häufigkeit von ungefähr 25% (ein Viertel) weißer Kugeln und ungefähr 75% roter Kugeln. Erst bei unendlich vielen Zügen erhält man diese relativen Häufigkeiten. Man sagt:

Die Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel ist:

p(*rot*) = 0,75
p(*weiß*) = 0,25

Man beobachtet.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist die relative Häufigkeit bei unendlich vielen (gedachten) unabhängigen Versuchen

Ergebnisse, Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten

Ergebnisse (Elementarereignisse)

Beispiel 2.3

a) Das Zufallsexperiment *einmal eine Münze werfen* hat zwei Ergebnisse (Elementarereignisse): K (Kopf) und Z (Zahl). Sie sind gleich wahrscheinlich.
Man sagt:
Der *Ergebnisraum* ist die Menge $\Omega=\{K, Z\}$, $|\Omega| = 2$
Man beobachtet:

$$p(K) = p(Z) = 0{,}5 = 1/|\Omega|$$

b) Das Zufallsexperiment *einmal würfeln* hat sechs Ergebnisse (Elementarereignisse), die gleich wahrscheinlich sind, wenn der Würfel in Ordnung ist.

$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\Omega|=6$ $\quad$ $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = 1/6 = 1/ |\Omega|$

Die Beispiel zeigen

Sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, so gilt:

$$\mathbf{p(Ergebnis) = 1 / |\Omega|}$$

Ereignisse

Beispiel 2.4
a) In einem Deutschkurs sind 10 Studenten. Jeder bekommt eine Nummer. Alle Nummern werden in eine Urne geworfen, danach zieht man einmal. Die Tabelle zeigt Namen, Nummern, Geschlecht und Herkunft der Studenten.

Name	Nummer	Geschlecht (weiblich/ männlich)	Herkunftsland
Ahmed	1	M	Iran
Seghani	2	W	Iran
Moustafa	3	W	Iran
Zeitoni	4	W	Iran
Okeke	5	M	Nigeria
Wang	6	M	China
Bogdanova	7	W	Ukraine
0mumbo	8	M	Nigeria
Mehmed	9	M	Iran
Zhu	10	M	China

Wir haben Ω ={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} , IΩI = 10.

Die Wahrscheinlichkeit für alle Ergebnisse ist gleich:

p(Ahmed)=p(Seghani) =……=.p(Zhu) = 1/10 = 0,1

Man kann aber auch noch andere Fragen stellen, beispielsweise: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, die Nummer eines Iraners zu ziehen? P(*Iraner) =?*

Das Merkmal *Iraner* ist ein *Ereignis:* *Iraner* = {1, 2, 3, 4, 9}, I *Iraner* I = 5 **p(*Iraner*) = 5 / 10 = 0,5**

Die Wahrscheinlichkeit, die Nummer eines Iraners zu ziehen ist 50%.

Ähnlich gilt: *Chinese* = {6,10}, I *Chinese* I = 2 **p(*Chinese*) =2 /10 = 0,2**

M = {1, 5, 6, 8, 9, 10} I M I = 6 **p(M) = 6 / 10 = 0,6**

Wichtig:
Wird beispielsweise die Nummer 6 gezogen, so sagt man *das Ergebnis 6 ist eingetreten*. Man beobachtet aber, dass auch das Ereignis *Chinese* und das Ereignis *M* eingetreten sind.

b) Wir würfeln ein Mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu würfeln? Ω={1,2,3,4,5,6} , I Ω I=6

Gerade Zahl ist ein *Ereignis*: *G* = {2,4,6}, I G I = 3 p(G) = 3 / 6 = 0,5

Wichtig:
Wird beispielsweise die Zahl4 gezogen, so sagt man *das Ergebnis 4 ist eingetreten*. Man beobachtet aber, dass auch das Ereignis *gerade Zahl* eingetreten ist. Die Beispiele zeigen:

Ereignisse sind beliebige Teilmengen des Ergebnisraums Ω. Wir bestimmen selbst, welches Ereignis für uns wichtig ist.

Sind alle Ergebnisse von Ω gleich wahrscheinlich, so ist: $p(Ereignis) = \frac{|Ereignis|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$

Jedes Ergebnis ist auch ein Ereignis (Elementarereignis) aber nicht jedes Ereignis ist ein Ergebnis.

Ein Ereignis X tritt ein, wenn das Ergebnis des Zufallsexperiments Element von X ist.

Besondere Ereignisse:

Das *unmögliche Ereignis* $\emptyset$: $p(\emptyset) = 0$

Die leere Menge. Im obigen Beispiel 2.4a etwa: "*Österreicher*"

Das *sichere Ereignis* Ω: $p(\Omega) = 1$

Ω ist die Menge aller Ergebnisse, eines von ihnen kommt sicher, wenn man das Experiment macht.

Das *komplementäre Ereignis (Gegenereignis)*

$$X' = \overline{X} = \Omega - X$$

$$p(\overline{X}) = \frac{|\Omega| - |X|}{|\Omega|} = 1 - p(X)$$

Das komplementäre Ereignis X' tritt ein, wenn X nicht eintritt
Beispiel: X= "ungerade Zahl" $\Rightarrow$ X' = " gerade Zahl "

Beispiel 2.5
Zufallsexperiment *zwei Mal würfeln*. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: Zwei gleiche Zahlen
B: Nur ungerade Zahlen
C: Mindestens eine gerade Zahl

Lösung: Ω = {(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1) ....(5,6),(6,5),(6,6)}, IΩI = 6^2 = 36 (Variationen $V^2{}_6$)

A = {(1,1),(2,2),....(6,6)} I A I = 6 $\Rightarrow$ p(A) = p (*zwei gleiche Zahlen)* = 6 / 36 $\approx$ 0,167

B = {(1,1),(1,3),(1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)} I B I = 3^2 = 9 (Variationen $V^2{}_3$) p(B) = 9 / 36 = 0,25

C: Wir arbeiten besser mit dem komplementären Ereignis (Gegenereignis) C'.

Mindestens eine gerade Zahl = nicht nur ungerade Zahlen $\Rightarrow$ ICI = I Ω I- IC'I= I Ω I- IBI = 36 - 9

Aufgaben

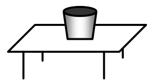
2.1 Zufallsexperiment *ein Mal würfeln*: Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: Primzahl, B: Ungerade Zahl, C: Höchstens *fünf*, keine Primzahl!
2.3 Zufallsexperiment: *zwei Mal eine Münze werfen:* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: *zwei gleiche Ergebnisse.* B: *zwei verschiedene Ergebnisse. C: kein Kopf D: mindestens ein Kopf.*
E: *höchstens ein Kopf*
2.3 Zufallsexperiment: *drei Mal Würfeln.* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: *drei gleiche Zahlen.* B: *nur gerade Zahlen*. C: *mindestens eine ungerade Zahl.* D: Ziffernsumme = 4.
2.4 Zufallsexperiment: *dreimaliger Münzwurf.* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: *dreimal Kopf.* B: *dreimal dasselbe*. C: *genau eine Zahl* D: *kein Kopf* E: *Mindestens ein Kopf.*
F: *höchstens ein Kopf.*
2.5 Eine Urne vier Kugeln mit den Nummern 1,2,3,4.. Wir ziehen zwei Mal mit Zurücklegen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: *Gerade Zahlen*, B: *nicht die Zahl 3,* C: *mindestens eine Drei.* D: *höchstens eine Drei*
2.6 Eine Urne vier Kugeln mit den Nummern 1,2,3,4.. Wir ziehen drei Mal mit Zurücklegen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: *Gerade Zahlen*, B: *nicht die Zahl 3,* C: *mindestens eine Drei.* D: *höchstens eine Drei*
2.7 Vor ihnen steht eine unbekannte Person. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie heute Geburtstag.
2.8 Vor ihnen steht eine unbekannte Person. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie an einem Sonntag Geburtstag.

Kontrollfragen
2.10 Welche Ereignisse sind Elementarereignisse.
2.11 Unter welcher Bedingung gilt: p(Ergebnis) = 1 / IΩI ?
2.12 Unter welcher Bedingung gilt: p (A) = I A I / IΩI ? Wofür steht das Symbol A?
2.13 Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis X sei 60%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis?
2.14 *Drei mal würfeln:* wie ‚heißen' die komplementären Ereignisse von
A: *keine Sechs*? B: *höchstens zwei Sechsen* C: *mindestens eine Sechs* D: *alle Zahlen gleich*

2.4 Geometrische Wahrscheinlichkeit

Dies ist eine besondere Form der Wahrscheinlichkeit, bei der alle Punkte einer Fläche für ein bestimmtes Experiment gleich wahrscheinlich sind.

Beispiel 2.6



Es beginnt zu regnen. Ein Kübel (offene, obere Kreisfläche $A = 100\text{cm}^2$) liegt auf dem Tisch (Fläche $\Omega = 500\text{cm}^2$). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Regentropfen, der auf den Tisch fällt auch in den Kübel trifft?

Lösung:
Die Fläche Ω und die Fläche A haben beide ∞ viele Punkte. Ein Fünftel aller Punkte von Ω liegt aber in A. Wenn ∞ viele Regentropfen fallen, so ist die relative Häufigkeit der Tropfen , die in den Kreis fallen, ein Fünftel. Daher gilt:

$$p(\text{Tropfen im Kreis}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Flächenmaß aller günstigen Punkte}}{\text{Flächenmaß aller möglichen Punkte}} = 1/5 = 0{,}2 \quad (20\%)$$

Allgemein lautet das Problem immer so:

Gegeben ist eine Fläche Ω und eine Teilfläche A: Weiters ist ein Zufallsexperiment gegeben, dessen Ergebnisse alle Punkte der Fläche Ω bilden können. Alle Punkte ergeben sich mit derselben Wahrscheinlichkeit. Dann gilt wieder.

$$p(\text{zufälliger Punkt} \in A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Flächenmaß von A}}{\text{Flächenmaß von } \Omega}$$

Analog lauten die Formeln für Längen und dreidimensionale Körper

Beispiel 2.7: Das Begegnungsproblem

Zwei Personen A und B vereinbaren, sich an einem bestimmten Ort zu treffen. Jede Person kann den Zeitpunkt des Eintreffens am Ort frei und zufällig, aber zwischen 8^h und 9^h frei wählen. Außerdem wird vereinbart, dass der erste, der eintrifft, 20 Minuten wartet und dann weggeht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich treffen.

Lösung: A trifft zum Zeitpunkt x ein. B trifft zum Zeitpunkt y ein. Wenn sie sich treffen, ist der Unterschied dieser Zeitpunkte höchstens 20, egal ob x > y oder y > x ist. Es gilt daher $|y-x| \le 20$ das bedeutet entweder:

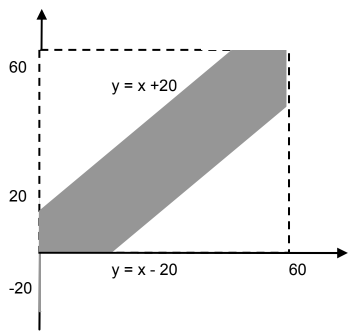
$y - x \le 20 \Leftrightarrow y \le x+20$ **oder** $x - y \le 20 \Leftrightarrow y \ge x - 20$

Insgesamt bedeuten also alle Punkte zwischen den Geraden y = x+20 und y = x-20 eine *günstige* Möglichkeit des Treffens

Wenn ein Punkt (x/y) in der schraffierten Fläche zwischen den beiden Geraden (rechte Abbildung) liegt, so bedeutet das, daß sich A und B treffen. Wenn ein Punkt (x/y) außerhalb dieser Fläche liegt, bedeutet es, daß sie sich nicht treffen.
$|\Omega| = 3600$

Die Wahrscheinlichkeit, sich zu treffen ist daher:

p (Punkt liegt in schraffierter Fläche) = (3600 -1600) / 3600 = 5 / 9 = 0,505



Aufgaben:
2.10) Experiment: Dreimaliger Münzwurf. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse!

a) A: keine Zahl [1/8] b) B: genau zwei Zahlen [3/8] c)C: mindestens ein Kopf [7/8]
d) D: höchstens eine Zahl [½]

2.11) Experiment: Zweimal Würfeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse!

a) A: Ziffernsumme = 4 [0,083] b) B: genau eine Sechs [0,277] c) C: keine Sechs [0,694]

d) D: zwei gleiche Zahlen [1/6]

e) E: mindestens eine Sechs [0,305]

f) F: Ziffernsumme = ungerade Zahl [½]

g)G: zwei verschiedene Zahlen [5/6]

2.12) Die Straßenbahnlinie 60 passiert zwischen 8.00Uhr und 8.03 Uhr eine bestimmte Haltestelle. Die Linie 62 passiert zwischen 8.02 und 8.04 dieselbe Haltestelle am Bahnsteig nebenan. Die genauen Zeitpunkte der Ankunft sind rein zufällig und alle gleich wahrscheinlich innerhalb des gegebenen Intervalls. Die Wartezeit kann vernachlässigt werden.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Passagiere der Linie 60 die andere Linie erreichen. [0,916]
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Passagiere der Linie 62 die andere Linie erreichen.

2.13) Schnellzug A passiert den Bahnhof zwischen 7.00 und 7.04 Uhr , Schnellzug B zwischen 7.02 und 7.05 Uhr. Die genauen Zeitpunkte der Ankunft sind rein zufällig und alle gleich wahrscheinlich innerhalb des gegebenen Intervalls. Beide dürfen bis zu 1 Minute auf den anderen Zug warten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass a) Die Passagiere von A den Zug B erreichen! [0,9583] b) Die Passagiere von B den zug A erreichen!
c) alle Passagiere umsteigen können!

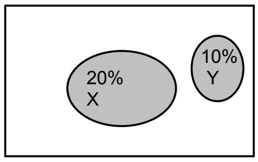
2.14a) Schnellzug A passiert den Bahnhof zwischen 7.00 und 7.04 Uhr , Schnellzug B zwischen 7.02 und 7.05 Uhr. Die genauen Zeitpunkte der Ankunft sind rein zufällig und alle gleich wahrscheinlich innerhalb des gegebenen Intervalls. Wie lange muss die beiderseitige Wartezeit bemessen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass alle Passagiere umsteigen können 50% beträgt.
b) Lösen Sie die Aufgabe für den Fall, dass B 30 Sekunden länger wartet als A!

Kontrollfragen:
2.15) Unter welcher Bedingung gilt: p (Ereignis) = $|$Ereignis$|$ / $|\Omega|$?
2.16) Für alle Ereignisse eines Experiments soll gelten: p(Ereignis) = 1/$|\Omega|$. Wie heißen solche Ereignisse?
2.17) Experiment: Zweimal würfeln und Ziffernsummen aufschreiben. Sind die Ziffernsummen Elementarereignisse?
2.18) Was versteht man unter "möglichen" und unter "günstigen" Fällen?

3. Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzter Ereignisse

3.1 Verknüpfung mit Oder

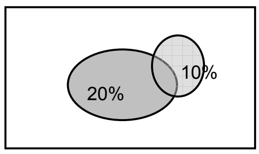
Gegeben sei ein beliebiges Experiment. X und Y seien zwei *disjunkte* Ereignisse aus Ω.
Es gilt: Wenn X kommt, dann kommt Y nicht und umgekehrt. In Gedanken führen wir nun das Experiment ∞ Mal durch. Die relative Häufigkeit für X sei z.B. 20% also p(X) = 0.20 und die relative Häufigkeit für X sei 10%, p(Y) = 0.1. Dann ist die relative Häufigkeit, für die Vereinigung $X \cup Y$ gleich 30% also $p(X \cup Y) = 0.3$, Daher gilt



$$\mathbf{X \cap Y = \varnothing \Rightarrow p(X \cup Y) = p(X) + p(Y)}$$

Wenn X und Y nicht disjunkt sind, gilt:

$$\mathbf{p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)}$$



Beispiel 3.1:
"Einmal Würfeln" . A: *Gerade Zahl",* B: *„Höchstens die Zahl 3".* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß *„eine gerade Zahl"* **oder** *„höchstens die Zahl „ 3* kommt?

Lösung: A={2,4,6}, B={1,2,3}, $A \cap B$={2}$\Rightarrow$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A.B)=3/6+3/6-1/6=5/6
Andere Lösung: $A \cup B$={1,2,3,4,6}$\Rightarrow$p(A+B)=5/6

Wichtige Formeln: $\mathbf{p(\Omega)=1}$ **und** $\mathbf{p(\varnothing)=0}$ Da X und $\overline{X}$ disjunkt sind, gilt $p(\overline{X}) = p(\Omega) - p(X) = 1 - p(X)$

3.2 Abhängige und Unabhängige Ereignisse

Beispiel 3.2. Gegeben sei folgende Tabelle

Personen	F (Frauen)	M (Männer)	Gesamt
P (Prüfung positiv)	300	500	800
N (Prüfung negativ)	900	1500	2400
Gesamt	1200	2000	**3200**

Die Wahrscheinlichkeit, daß *jemand (= beliebige Person)* die Prüfung positiv besteht ist :

p(P)=800/3200 = 25%   analog: p(N) = 75%,

Die Wahrscheinlichkeit, daß *jemand (= beliebige Person)* eine Frau ist, beträgt:

p(F)=37.5% , analog p(M)=62.5%.

Wie groß ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß *eine Frau* die Prüfung positiv besteht?

Wir schreiben dies mit folgender Symbolik: $p(P|F)$ = 300/1200 = 25%

Dabei bedeutet $p(P|F)$ die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis P ***„unter der Bedingung F"***.

Die Bedingung F, („*Frau*") ist also gegeben; wir bestimmen die Wahrscheinlichkeit nur innerhalb der Frauen. 300 Frauen bestehen die Prüfung positiv und 1200 Frauen gibt es

Wir beobachten:
In unserem Beispiel ist p(P) = $p(P|F)$, d.h., die Wahrscheinlichkeit, daß eine *beliebige Person* die Prüfung besteht ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, daß *eine Frau* die Prüfung besteht. Das Bestehen der Prüfung ist also vom Geschlecht unabhängig. Man sagt.: Die Ereignisse F und P sind ***unabhängige Ereignisse.***

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Mann die Prüfung besteht = p(..|..) =............
Die Wahrscheinlichkeit daß ein Mann die Prüfung nicht besteht = p(..|..) =............

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine **beliebige Person** eine Frau ist = p(...) =......
Die Wahrscheinlichkeit, daß eine **beliebige Person** ein Mann ist = p(...) =......

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein **erfolgreicher Prüfungskandidat** eine Frau ist = p(..|..)=............
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein **erfolgreicher Prüfungskandidat** eine Frau ist = p(..|..)=............

3.4 Verknüpfung mit Und:

Beispiel 3.3:

Personen	F (Frauen)	M......(Männer	Gesamt
A trinkt gerne Bier	100	1500	1600
B trinkt nicht gerne Bier	1100	500	1600
Gesamt	1200	2000	**3200**

Wir berechnen:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine *beliebig ausgewählte Person* gerne Bier trinkt, beträgt: p(A) =1600/3200 =50%
- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine *beliebige ausgewählte Person* weiblich ist p(F) =1200/3200 =33,3%
- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine *beliebige ausgewählte Person* gerne Bier trinkt UND *weiblich ist*, beträgt: $p(A \cap F)$ = 100/3200 = 0,03125 = 3,125%

Außerdem gilt:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass eine *Frau* gerne Bier trinkt= $p(A|F)$, =100/1200 =8,33%
- (Die Wahrscheinlichkeit, dass ein *Mann* gerne Bier trinkt = $p(A|M)$, =1500/2000 =75%)

Man beobachtet:
(1) $p(A|F) \neq p(A)$ Das Biertrinken ist vom Geschlecht abhängig. A und F sind ***abhängige Ereignisse***

(2) $p(A|F) = \frac{100}{1200} = \frac{\frac{100}{3200}}{\frac{1200}{3200}} = \frac{p(A \cap F)}{p(F)}$

$$p(\textit{Ereignis X unter der Bedingung Y}) = \frac{p(\textit{Ereignis geschnitten mit Bedingung})}{p(\textit{Bedingung})}$$

$$\mathbf{p(X \cap Y) = p(X|Y).p(Y).}$$

Sonderfall:

X und Y unabhängig $\Rightarrow p(X|Y)=p(X)) \Rightarrow \quad p(X\cap Y)=p(X).p(Y)$

Beispiel 3.4
In einer Urne befinden sich drei rote und zwei weiße Kugeln. Wir ziehen ***mit Zurücklegen*** (der zweite Zug ist also vom ersten unabhängig). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) 3bei zwei Zügen beide Kugeln rot sind! Lösung: $p = 3/5 \,.\, 3/5 = (3/5)^2 = 9/25$
b) bei zwei Zügen genau eine rote Kugel kommt!
Lösung: p = p({1.Kugel rot $\cap$ 2.Kugel nicht rot }$\cup${2.Kugel rot $\cap$ 1.Kugel nicht rot}) = 3/5 . 2/5 + 2/5. 3/5 = 12/25
c) bei zwei Zügen mindestens eine rote Kugel kommt!
Lösung: p = p(genau eine Kugel rot $\cup$ beide Kugeln rot) = 12/25 + 9/25 (disjunkte Ereignisse)

d) Wie oft muss man ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu bekommen, größer oder gleich 99 % ist?

Lösung:
p(rote Kugel) $\geq$0,99
p(1.Kugel rot $\cup$ {1.Kugel nicht rot $\cap$2.Kugel rot} $\cup$ (1.Kugel nicht rot $\cap$2.Kugel nicht rot $\cap$ 3.Kugel rot} $\cup$..........) $\geq$0,99

$3/5 \quad + \quad 2/5.3/5 + \quad 2/5.2/5.3/5 + \ 2/5.\ 2/5.2/5.3/5 \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ (2/5)^{n-1}.3/5 \geq 0{,}99$

$3/5\ .\ (\ 1 + 2/5 + (2/5)^2 + (2/5)^3 + \quad (2/5)^{n-1)}\ ) =$ geom. Reihe $= 3/5\ .\ \{\ 1- (2/5)^n \}\ /\ \{\ 1 -2/5\ \} \geq 0{,}99$

$1 - (2/5)^n \ \geq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad (2/5)^n \leq 0{,}01 \quad n \geq \log 0{,}01 / \log\ 0{,}4 = 5.025$
Bei n = 6 Zügen beträgt die Wahrscheinlichkeit, ein rote Kugel zu bekommen mehr als 99%

Einfacherer Weg: p (keine Kugel ist rot) = $(2/5)^n \Rightarrow$ p(mindestens eine Kugel rot) = $1 - (2/5)^n \geq 0{,}99$

Beispiel 3.5:
In einer Urne befinden sich vier rote, drei grüne und zwei weiße Kugeln. Wir ziehen zwei Mal ***ohne*** Zurücklegen (das bedeutet, dass der zweite Zug abhängig vom ersten Zug ist) .Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

a) Die erste Kugel rot ist: Lösung p = 4/9

b) Die zweite Kugel rot ist unter der Bedingung dass die erste Kugel nicht rot ist: Lösung: p = 4/8

c) Die zweite Kugel rot ist unter der Bedingung, dass auch die erste Kugel rot ist. Lösung p = 3/8

d) beide Kugeln rot sind:
Lösung: p = p(1.Kugel rot $\cap$ (2.Kugel rot unter der Bedingung, dass auch die 1.Kugel rot ist)) =

= p (1. Kugel rot) . p (2. Kugel rot / erste Kugel rot) = 4/9 . 3/8

e) Die erste Kugel weiß und die zweite Kugel rot ist:
Lösung: p = p(1.Kugel weiß) . p(2.Kugel rot / 1.Kugel weiß) = 2/9. 4/8

f) Beide Kugeln gleich sind:
Lösung: p = p(beide rot $\cup$ beide grün $\cup$ beide weiß) = 4/9 . 3/8 + 3/9 . 2/8 + 2/9 . 1/8

g) Beide Kugel verschieden sind
Lösung: p = p (Die Kugeln sind nicht gleich) = 1 - p (Die Kugeln sind gleich)

h) Genau eine Kugel rot ist:
Lösung: p = p(1.Kugel rot) .p(2.Kugel nicht rot / 1. Kugel rot) + p(1. Kugel nicht rot).p(2.Kugel rot / 1.Kugel nicht rot) =

= 4/9 . 5/8 + 5/9 . 4/8
j) Mindestens eine Kugel rot ist
1.Lösungsweg: p = p(beide rot $\cup$ genau eine Kugel rot) = p(beide rot) + p(genau eine Kugel rot) = 52/72 (disjunkte Ereignisse!)

2. Lösungsweg: p = 1 – p(beide Kugeln sind nicht rot) = 1 – $^5/_9 . ^4/_8$ = 52/72

Exkurs: Die Axiome von Kolmogorov

Die drei wichtigsten Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit, die wir bisher beobachten, kann man folgendermaßen zusammenfassen:

1. Axiom: Zu jedem Ereignis $A\subset\Omega$ gehört eine Zahl $p(A)\geq 0$, wir nennen sie Wahrscheinlichkeit

2.Axiom: $p(\Omega] = 1$ (sicheres Ereignis)

3. Axiom: $A\cap B=\emptyset \Rightarrow p(A\cup B) = p(A)+p(B)$

Bemerkung: Wir haben die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als relative Häufigkeit bei ∞ vielen Versuchen definiert und dabei die Richtigkeit der 3 Axiome beobachtet. In der höheren Mathematik geschieht es umgekehrt: Man beginnt mit den 3 Axiomen und kann aus ihnen sogar das Gesetz der großen Zahlen beweisen

Aufgaben.

3.1)Entwickeln Sie eine Formel für
a)p(A+B+C)=? b) p(A+B+C+D)=? c) p($A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n$) d) p($A\Delta B$) =?

3.2)In einer Urne sind drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Wir ziehen dreimal ohne Zurücklegen
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: Die zweite Kugel ist schwarz unter der Bedingung, dass die erste Kugel schwarz war! [1/4]
B: Die zweite Kugel ist schwarz unter der Bedingung, daß die erste Kugel weiß war! [½]
C: Die dritte Kugel ist schwarz unter der Bedingung,daß die beiden ersten schwarz waren! [2/3]
D: Die dritte Kugel ist weiß unter der Bedingung,daß die beiden ersten schwarz waren [1]
E: Die dritte Kugel ist schwarz unter der Bedingung,daß die erste schwarz und die zweite weiß war. [1/3]
F: Es kommt genau ein schwarze Kugel [0,3]

3.3)Experiment: Dreimal Würfeln.
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: "Drei Sechsen" B: "Drei gleiche Ziffern" C:"genau zwei gleiche Ziffern" D: "Verschieden ziffern"
b) Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu bekommen, größer als ½ ist?

3.4)Die Tabelle zeigt Häufigkeiten für bestimmte Merkmale bei Informatik-Studenten:

Universität Erfolg	UNI	WU	TU	gesamt
positiv	300	400	100	800
negativ	200	100	200	500

Von den insgesamt 1300 Studenten werden einige zu einem Interview eingeladen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse für einen eingeladenen Studenten:
a) er ist positiv b) er kommt von der TU c) er studiert an der Uni und ist negativ d) ein WU-Student ist positiv.
e) ein positiver Student kommt von der WU f) ein negativer Student kommt von der WU oder der TU
g) ein Student, der von der UNI oder WU kommt ist positiv

3.5) Experiment: Aus einer Urne mit drei schwarzen und vier roten Kugeln wird ohne Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: Bei drei Zügen sind alle Kugeln Schwarz. B: Bei drei Zügen sind zwei Kugeln Schwarz
C: Bei drei Zügen ist mindestens eine Kugeln schwarz D. Bei drei Zügen sind mindestens zwei Kugeln schwarz

3.6) Wie oft muß man eine Münze werfen, damit die Wahrscheinlichkeit, einen Kopf zu bekommen 99,99% wird?

3.7) Drei Studenten werden gefragt, wann sie Geburtstag haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) der erste Student heute Geburtstag hat? [1/365]
b) die beiden ersten Studenten heute Geburtstag haben? [1/ 365^2]
c) die beiden ersten Studenten am selben Tag Geburtstag haben. [1/365]
d) mindestens zwei der drei Studenten heute Geburtstag haben. [1 – 1/365^3]
e) genau zwei der 3 Studenten heute Geburtstag haben [3. 364/ 365^3]

3.8) Eine Urne enthält vier weiße, drei grüne und eine rote Kugel. Man zieht drei mal mit Zurücklegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

a) Alle drei Kugeln sind weiß
b) Alle drei Kugeln sind grün
c)Alle drei Kugeln sind gleich
d) Höchstens zwei Kugeln sind gleich
e) genau zwei Kugeln sind gleich
f) mindestens zwei sind gleich
g) Alle drei sind verschieden
h) keine der Kugeln ist rot
h) Wie oft muss man ziehen, dass die Wahrscheinlichkeit ≥ 95% ist?
.
3.9) Das Ergebnis zeigt die Tabelle. Um die Haltbarkeit von Tomaten zu vergleichen, wurden gewöhnliche Früchte und solche aus biologischem Anbau drei Tage nach der Ernte geprüft, ob sie verdorben waren oder nicht

	B Bio	B' gewöhnlich	Gesamt
X verdorben	200	1800	2000
X' unverdorben	800	7200	8000
	1000	9000	10 000

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
aa) eine beliebig ausgewählte Tomate verdorben ist!
ab) eine beliebig ausgewählte Tomate aus biologischem Anbau stammt
ac) eine Biotomate verdorben ist
ad) eine beliebig ausgewählte Tomate gewöhnlichem Anbau stammt und verdorben ist
ae) Eine unverdorbene Tomate aus biologischem Anbau stammt!
b) Ist die Haltbarkeit, von der Art des Anbaus abhängig?
c) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und formulieren Sie die zugrunde liegenden Ereignisse in Deutscher Sprache!
ca) $p(X\cap B)=?$ cb) $p(X'\cap B')=?$ cc) $p(X'|B)=?$ dd) $p(B|X')=?$

3.10) Bei Sicherheitsüberprüfungen von verschiedenen Autos stellt ein Autofahrerklub folgendes fest:

	Marke A	Marke B	Marke C	
X Auspuff kaputt	500	300	1000	1800
Y Bremse kaputt	600	400	900	1900
Z Alles in Ordnung	100	200	200	500
gesamt	1000	800	2000	3800

Achtung: Die Glieder in der letzten Zeile sind nicht gleich der Summe der ersten drei Zeilen. Bestimmen Sie zuerst in jeder Spalte $X\cap y$!

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
aa) Ein beliebig ausgewähltes Auto von der Marke A stammt! ab) Ein Auto mit kaputtem Auspuff von der Marke A stammt!
ac) Ein Auto der Marke A einen kaputten Auspuff hat ! ad) Ein beliebig ausgewähltes Auto einen kaputten Auspuff hat!
ad) Ein beliebig ausgewähltes Auto einen kaputten Auspuff und eine kaputte Bremse hat
ae) Ein beliebig ausgewähltes Auto einen kaputten Auspuff odereine kaputte Bremse hat
af) Ein beliebig ausgewähltes Auto ***entweder*** einen kaputten Auspuff odereine kaputte Bremse hat
af) Ein Auto mit kaputten Auspuff und kaputter Bremse von der Marke C stammt
ag) Ein Auto mit kaputten Auspuff oder kaputter Bremse von der Marke C stammt
ah) Bei einem Auto der Marke C oder B alles in Ordnung ist oder nur die Bremse kaputt ist
b) Sind die Schäden an Auspuff und Bremse unabhängig von der Marke?
c) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und formulieren Sie die zugrunde liegenden Ereignisse in Deutscher Sprache?
$p(A\cap B)=?$ $p(X\cap Y|A)$ $p(XuY|A')$ $p(B|X\cap Y')$ $p(XuZ|C)$ $p(X'\cap Y|CuB)$ $p(X\Delta Y|B)$ $p(A'|X\Delta Y)$

Kontrollfragen:
3.10) Unter welcher Bedingung gilt. $p(X u Y) = p(X) + p(Y)$
3.11) Unter welcher Bedingung gilt. $p(X \cap Y) = p(X) . p(Y)$
3.12a) Welches Ereignis ist im Symbol $p(X|Y)$ eine vorgegebene Bedingung
b) Welche Bedeutung hat das andere Ereignis?
3.12) Wenn X und Y unabhängig sind, gilt $p(X|Y)$ = ...
3.13) $p(X|\Omega)$ = ...

4. Totale Wahrscheinlichkeit   Satz von Bayes

4.1 Totale Wahrscheinlichkeit:

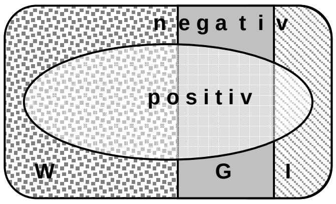
Beispiel 4.1:
In Österreich kann man Medizin nur in Wien **(W)**, Graz **(G)** oder Innsbruck **(I)** studieren, aber nicht gleichzeitig an zwei Orten: also sind die Ereignisse W,G und I *paarweise disjunkt*:

$W \cap G = \emptyset, W \cap I = \emptyset, G \cap I = \emptyset$.

Die Tabelle zeigt, wie viel Studenten in einem bestimmten Jahr positiv (P) oder negativ (N) beim Studium waren:

	W	G	I	Gesamt
P	500	400	100	1000
N	300	100	100	500
Gesamt	800	500	200	1500
	$p(P\cap W) = 5/15$	$p(P\cap G) = 4/15$	$p(P\cap I) = 1/15$	$p(P) = 2/3$

Die Summe: $p(P\cap W) + p(P\cap G) + p(P\cap I) = 5/15 + 4/15 + 1/15 = 10/15 = 2/3 = p(P)$



Berechnen Sie die Summen:

$p(N\cap W) + p(N\cap G) + p(N\cap I) = \ldots\ldots\ldots = p(\ldots)$.
$p(W\cap P) + p(W\cap N) = \ldots\ldots\ldots\ldots = p(\ldots)$
$p(G\cap P) + p(G\cap N) = \ldots\ldots\ldots\ldots p(\ldots)$
$p(I\cap P) + p(I\cap N) = \ldots\ldots\ldots\ldots p(\ldots)$

Da W,G und I paarweise disjunkt sind, sind auch $P\cap W$, $P\cap G$ und $P\cap I$ paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ist P, also $(P\cap W\cup(P\cap G\cup(P\cap I) = P \Rightarrow p(P\cap W) + p(P\cap G) + p(P\cap I) = p(P)$

Allgemein gilt folgende Regel:

Wir haben ein System von paarweise disjunkten Ereignissen $Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n$
und ein Ereignis X, das nur gemeinsam mit den Ereignissen Y_i auftritt.

Dann kann man p(X) wie folgt zerlegen:

$$\mathbf{p(X) = p(X\cap Y_1) + p(X\cap Y_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + p(X\cap Y_n)}$$

Außerdem gilt wegen $p(X\cap Y) = p(Y).p(X|Y)$:

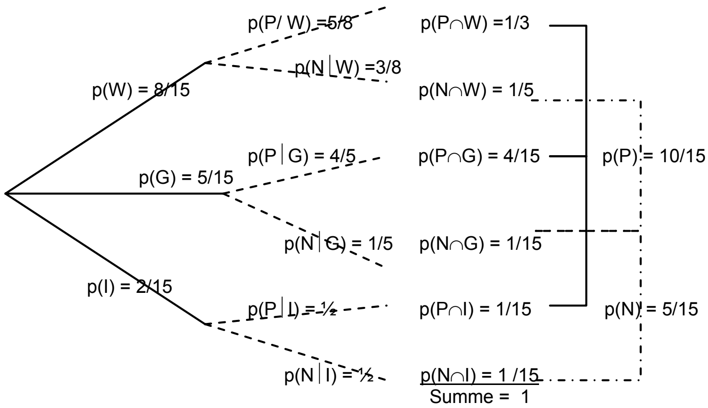
$$\mathbf{p(X) = p(Y_1).p(X|Y_1) + p(Y_2).p(X|Y_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + p(Y_n).p(X|Y_n)}$$

*Gleichung für die **totale Wahrscheinlichkeit***

4.2 Bäume

Oft ist es hilfreich, sich die Situation des vorigen Beispiels an einem sogenannten Baum klarzumachen. Hier nochmals die Tabelle des Beispiels 4.1:

	W	G	I	Gesamt
P	500	400	100	1000
N	300	100	100	500
Gesamt	800	500	200	1500



Man beachte:
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, die von einem gemeinsamen Verzweigungspunkt ausgehen ist immer 1 d.h. 100%. Beispielsweise ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten der letzten Spalte gleich 1.

Nochmals einige Beispiele zur Sprache:

p(G)
Die Wahrscheinlichkeit, daß *jemand* in Graz studiert
Man wählt zufällig einen *beliebigen* Studenten aus und fragt ihn *wo* er studiert

p(P)
Die Wahrscheinlichkeit, daß *jemand* bei der Prüfung erfolgreich (positiv) ist
Man wählt zufällig einen *beliebigen* Studenten aus und fragt ihn , ob er *positiv* ist

p(P/G)
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein *Grazer Student* die erfolgreich ist:
Gegeben ist die Bedingung *Grazer Student* **: M**an wählt zufällig nicht einen beliebigen sondern einen *Grazer Studenten* aus und fragt ihn; ob er positiv war

p(G/P)
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein *positiver Student* aus Graz kommt. Gegeben ist hier die Bedingung *„positiver Student“.*
Man wählt zufällig einen *positiven Studenten* aus und fragt ihn, ob er in Graz studiert

p(P∩G)
Die Wahrscheinlichkeit, daß ein *beliebiger Student* positiv ist und aus Graz kommt. Hier ist *keine Bedingung* gegeben
Man wählt zufällig einen *beliebigen* Studenten und stellt ihm zwei Fragen: *“Kommst du aus Graz?“* und fragt *„Bist Du positiv?“*

Wir berechnen nun:
$p(P)$ = (Formel für totale Wahrscheinlichkeit) $=p(P\cap W)+ p(P\cap G)+ p(P\cap I)=1/3+4/15+1/15 = 2/3$ und

$p(G|P)=p(G\cap P)/p(P)= p(G\cap P)/[(P\cap W)+ p(P\cap G)+ p(P\cap I)]=(4/15):(2/3)=2/5=40\%$.

Man erkennt daraus die folgende Formel, sie heißt

4.3 Satz von Bayes

Es seien $Y_1,Y_2\ldots\ldots Y_s$ paarweise disjunkte Ereignisse, deren Vereinigung Ω ergibt : $\Sigma Y_i = \Omega$. X€Ω sei ein beliebiges Ereignis, dann gilt

$$p(Y_i|X) = \frac{p(X|Y_i).p(Y_i)}{\sum p(X|Y_i)}$$

Aufgaben:
4.1) An einer Universität sind 30% Ausländer, davon studiert die Hälfte Medizin. Insgesamt studieren zwei Drittel aller Studenten dieser Universität Medizin.
a)Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ausländer nicht Medizin studiert.
b)Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Inländer Medizin studiert
c)Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Student Medizin studiert und Ausländer ist
d Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Student nicht Medizin studiert in Ausländer ist
e)Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Medizinstudent Inländer ist!

4.2) Gegeben sei ein Baum: $p(A) = 30\%$, $p(\overline{B}|A) = 40\%$, $p(B|\overline{A}) = 50\%$.

a)Zeichnen Sie den Baum zuerst beginnend mit dem Ereignis A und seinem Kompliment. Berechnen Sie alle Wahrscheinlichkeiten des Baumes!
b)Zeichnen Sie den „umgekehrten Baum“ beginnend mit B und dessen Kompliment mit allen Wahrscheinlichkeiten.
4.3)Gegeben sei folgender Baum: Bei jeder Verzweigung entstehen 2 neue Möglichkeiten. Ausgehend vom Anfangspunkt durchläuft man noch auf jedem Weg zwei zusätzliche Verzweigungspunkte. Benennen Sie alle Wahrscheinlichkeiten dieses Baumes mit den richtigen Symbolen und kehren Sie den Baum um!
4.4)Entwickeln Sie eine Formel für folgende Wahrscheinlichkeiten:

a)$p(A|B \cap C)$ b)$p(A|\overline{B} \cap C)$ c)$p(A|B \cup C)$

4.5)Es gibt drei Studienrichtungen X,Y und Z. die Ereignisse X und Y sind doppelt so wahrscheinlich wie Z. In der Studienrichtung X sind zwei Drittel der Studenten negativ, in der Studienrichtung ist es ein Viertel. Insgesamt ist ein Drittel der Studenten positiv.
a)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Student der Studienrichtung Z positiv ist?
b)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Student der Studienrichtung Y angehört und negativ ist?
c)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein positiver Stundet der Studienrichtung x angehört?
4.6)In einer Urne sind drei weiße und eine schwarze Kugel. Wir ziehen dreimal ohne die Kugeln zurückzulegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß a)die zweite Kugel schwarz ist, b)die zweite Kugel weiß ist, c)die dritte Kugel schwarz ist, die dritte Kugel weiß ist!
4.7)Berechnen Sie Frage 4) für „Dreimal Ziehen mit Zurücklegen“
4.8)In einer Urne sind drei weiße und eine schwarze Kugel
4.9)Zur Mathematikprüfung darf man viermal antreten. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Student S die Mathematikprüfung schafft, sei 40%, egal ob er beim ersten Termin oder bei zweiten, dritten oder vierten Termin antritt.
a)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die Prüfung aa)beim ersten Termin, ab) beim zweiten Termin, ac) beim dritten Termin, ad) beim vierten Termin schafft? ae)überhaupt nicht schafft?
b)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die Prüfung beim ersten oder zweiten Termin schafft!?
c)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die Prüfung **spätestens** beim dritten Termin schafft?
d)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er die Prüfung **frühestens** beim dritten Termin schafft?

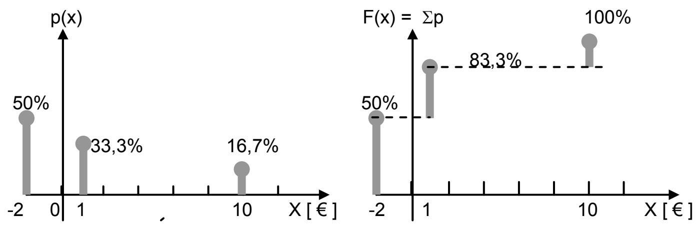
5. Drei diskrete Verteilungen

5.1 Grundbegriffe

Beispiel 5.1

Gegeben sei folgendes Zufallsexperiment:
Ein Mal Würfeln. Wenn eine der Zahlen 1,2 oder 3 kommt, muss man 2€ an die Bank bezahlen, wenn 4 oder 5 kommt, bekommt man 1€ von der Bank, wenn die Zahl 6 kommt, bekommt man 10€

Ereigniss	Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeit
$A_1 = \{1,2,3\}$	$X_1 = -2€$	$p_1 = 1/2 = 50\%$
$A_2 = \{4,5\}$	$X_2 = +1€$	$p_2 = 1/3 \approx 33.3\%$
$A_3 = \{6\}$	$X_3 = +10$ €	$p_3 = 1/6 \approx 16{,}7\%$



Wahrscheinlichkeitsfunktion
(probability function, frequency function)

Verteilungsfunktion
(probability distribution)

Die Abbildung zeigt zwei mögliche graphische Darstellungen des Experiments.

Jedem Ereignis wird eine Zufallsvariable X € R zugeordnet.
Die Wahrscheinlichkeitsfunktion (links) stellt die Wahrscheinlichkeit p(X) dar.

Die Verteilungsfunktion (rechts)stellt die kumulierte Wahrscheinlichkeit dar.

Zufallsvariable:

Ereignisse sind Mengen (Teilmengen von Ω). Bei vielen Experimenten entsprechen bestimmten Ereignissen bestimmte reelle Zahlen X. Diese Zahl nennt man *Zufallsvariable*. Man sagt auch: Eine *Zufallsvariable* wird einem bestimmten Ereignis *zugeordnet.*

Im Beispiel entspricht dem Ereignis A_1 die Zahl $X_1 = -2$(2€ bezahlen).

Diskrete und kontinuierliche Zufallsvariable:
Kann die Zufallsvariable nur einzelne isolierte Werte annehmen, so spricht man von einer *diskreten Zufallsvariablen*, nimmt sie alle Werte eines Intervalls an, so spricht man von einer *kontinuierlichen* Zufallsvariablen.

Wahrscheinlichkeitsfunktion:

Für jeden Wert der Zufallsvariablen X kann man nun die Wahrscheinlichkeit p(X) bestimmen, die sie auf Grund des Experiments hat. Die Funktion p(x) heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion*. (Englisch: *probability function* oder *frequency function*).

$$p(X) = p\,(\text{Zufallsvariable} = X)$$

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss gleich 1 (100%) betragen: $\Sigma p(x) = 1$. Im Beispiel gilt etwa: Die Wahrscheinlichkeit, genau 1€ zu bekommen, beträgt $p(X=1)=1/3 \approx 33{,}3\%$

Verteilungsfunktion:

Die kumulierte Wahrscheinlichkeit heißt *Verteilungsfunktion F(X).* Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable kleiner oder gleich X ist.

$$F(X) = p(\text{Zufallsvariable} \leq X) = \Sigma\, p(x)$$

Erwartungswert:

Analog zum Mittelwert in einer Häufigkeitstabelle, bildet man für eine Zufallsvariable den sogenannte *Erwartungswert* μ:

$$\boldsymbol{\mu = \Sigma X_i . p(X_i)} \qquad (5.1)$$

Im Beispiel 5.1 ist: $\mu = x_1.p(x_1) + x_2.p(x_2) + x_3.p(x_3) = (-2\,).\,{}^1/_2\; + (1).\,{}^1/_3\; + 10\,.{}^1/_6\; = 1.$

Etwas ungenau ausgedrückt bedeutet dies: Würde man ∞ oft würfeln, so bekäme man *im Mittel* 1€ *pro Spiel*. Die Bank würde *auf Dauer* bei diesem Spiel verlieren.

Varianz

Analog zum mittleren quadratischen Fehler wird die *Varianz* σ definiert.

$$\sigma^2 = \Sigma (X_i - \mu)^2 . p(X_i)$$

Sie informiert uns darüber, ob größere oder kleinere Abweichungen vom Mittelwert μ eher wahrscheinlich oder unwahrscheinlich sind. Es gilt wieder die Formel, die wir bereits in der beschreibenden Statistik bewiesen haben.

$$\boldsymbol{\sigma^2 = \Sigma X_i^2 . p(X_i) - \mu^2} \quad (5.2)$$

Im Beispiel 5.1 ist: $\sigma^2 = (X_1 - \mu)^2 . p(X_1) + (X_2 - \mu)^2 . p(X_2) + (X_3 - \mu)^2 . p(X_3) = (-2 - 1)^2 . {}^1/_2 + (1 - 1)^2 . {}^1/_3 + (10 - 1)^2 . {}^1/_6 = 18$

Mit der Formel: $\sigma^2 = X_1^2 . p(X_1) + X_1^2 . p(X_1) + X_1^2 . p(X_1) - \mu^2 = (-2)^2 . {}^1/_2 + 1^2 . {}^1/_3 + 10^2 . {}^1/_6 - (1)^2 = 18$ $\qquad \sigma \approx 4{,}24$

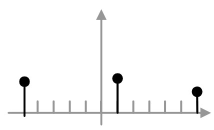
Beispiel 5.2

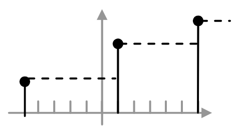
Eine Münze wird drei Mal geworfen. Bei drei gleichen Ergebnissen bekommt man 6€, Bei zwei Köpfen bekommt man 1€. Bei allen anderen Ergebnissen muss man einen bestimmten, aber jeweils gleichen Betrag zahlen.

a) Wie hoch ist dieser, wenn der Erwartungswert gleich Null sein soll.
b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion und die Varianz!

Lösung: (Kopf = 1,Zahl = 0) $|\Omega| = 8$

Ereignis	Zufallsvariable	Wahrscheinlichkeit
$A_3 = \{(1 \mid 1 \mid 1),(0 \mid 0 \mid 0)\}$ $\lvert A_3 \rvert = 2$	$X_3 = 6€$	$p(X_3) = 2/8 = 25\%$
$A_2 = \{0 \mid 1 \mid 1),(1 \mid 0 \mid 1),(1 \mid 1 \mid 0)\}$ $\lvert A_2 \rvert = 3$	$X_2 = 1€$	$p(X_{2'}) = 3/8 = 37{,}5\%$
$\lvert A_1 \rvert = 3$	$X_1 = ?$	$p(X_1) = 3/8 = 37{,}5\%$





a) $X_1 . {}^3/_8 + 1 . {}^3/_8 + 6 . {}^2/_8 = 0 \Rightarrow 3X_1 = -15$ $\underline{\mathbf{X_1 = -5}}$ [€]

b) $\sigma .^2 = 25 . {}^3/_8 + 1 . {}^3/_8 + 36 . {}^2/_8 - 0 = 18{,}75$ $\qquad \underline{\mathbf{\sigma = 4{,}33}}$

5.2 Die Binomialverteilung:

Bernoulli Experiment:

Gegeben sei ein Experiment mit zwei Ausgängen:

Ereignis A (Erfolg) mit p(A) =p   Ereignis A' (Misserfolg) mit p(A') = q = 1-p.

Ein solches Experiment heißt *Bernoulli Experiment.* Die Wahrscheinlichkeit p wird auch *Erfolgswahrscheinlichkeit* genannt. Wir führen diese Experimente n mal ***unabhängig*** *von einander* durch, und fragen:

"Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei n unabhängigen Versuchen k mal das Ereignis A (Erfolg) eintritt?" ($k \leq n € N$)

Lösung:
Wenn das Ereignis A genau k mal eintritt, dann muss das Ereignis A' genau n-k mal eintreten. Beispielsweise sollen die ersten k Experimente das Ereignis A liefern und danach alle Experimente das Ereignis A'. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Beispiel ist

$$p(\underbrace{A,A,\ldots\ldots\ldots A}_{\text{k Mal}},\underbrace{A',A'\ldots\ldots\ldots A'}_{\text{n-k Mal}}) = p^k . q^{n-k}$$

Die Erfolge A brauchen aber nicht unbedingt bei den ersten k Experimenten einzutreten, sie können auch in anderer Reihenfolge - "gemischt" mit den Ereignissen A' - eintreten. Wie viele solche Möglichkeiten gibt es? Die Antwort ist: C^k_n .(Kombinationen). Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$P_n(k) = \binom{n}{k} . p_k . q^{n-k.}$$

Zusammenfassung

Ein Bernoulli-Experiment hat 2 Ausgänge A (Erfolg) und A' mit den Wahrscheinlichkeiten p und q =1 - p.

p(bei n unabhängigen Experimenten tritt k mal das Ereignis A (Erfolg) ein) = p(Zufallsvariable = k) = $\binom{n}{k} . p^k . q^{n-k}$

Erwartungswert: μ **= n.p** (5.3)   **Varianz:** σ **=** $\sqrt{\mathbf{(n.p.q)}}$ (5.4)

(Beweis als Übungsaufgabe im Unterricht)

Beispiel 5.3
Bei einer bestimmten Münze ist die Wahrscheinlichkeit für einen Kopf 70% und für eine Zahl nur 30%.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 Würfen
a)genau 10 Köpfe kommen! b)genau 8 Köpfe kommen! c)mindestens 8 Köpfe kommen!
d)höchstens 8 Köpfe kommen!

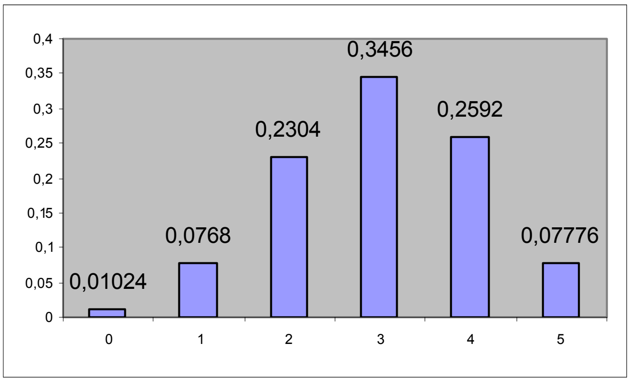
Lösung: n = 10, p = p(Kopf) = 0,7, q = p(Zahl) = 1 - 0,7 = 0,3 Zufallsvariable k: Anzahl der Köpfe bei 10 Experimenten

a) $p(k=10)=\binom{10}{10}.0{,}7^{10}.0{,}3^{0}=0{,}7^{10}\approx 0{,}0282$ **b)** $p(k=8)=\binom{10}{8}.0{,}7^{8}.0{,}3^{2}\approx \mathbf{45.0.0576.0{,}09=0{,}233}$

c) $p(k\geq 8)=p(8)+p(9)+p(10)\approx 0{,}382+0{,}121+0{,}233=0{,}028$ **d)** $p(k\leq 8)=1-p(k>8)=1-(p(9)+p(10))=1-0{,}121-0{,}028=0{,}851$

Beispiel 5.4

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fußballer ein Tor trifft, betrage 60%. Er darf 5 mal schiessen. die Zufallsvariable k gibt die Anzahl der Treffer an.
Bestimmen Sie
a) die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion für k.!
b) den Erwartungswert und die Varianz!

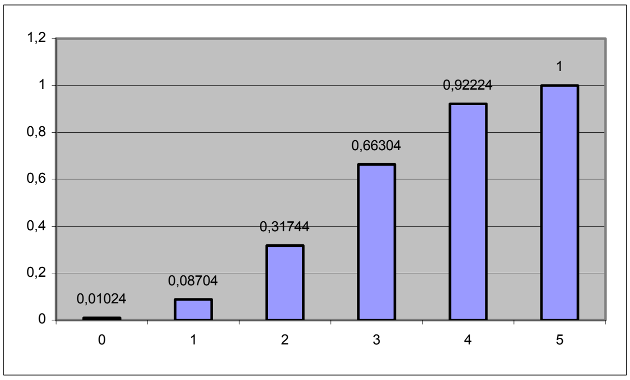


Lösung:
a) die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion sind in nebenstehender Abbildung angegeben.
b) Wir berechnen den Erwartungswert zunächst auf Grund der Definition:

$\mu = \Sigma_\kappa k..p(k)$ = 0.0,01024 + 1.0,0768 + 2.0.23 + 3.0,346 + 4.0,259 + 5.0,778 = 3

Die Formel 5.3 ergibt dasselbe μ = n.p = 5 . 0,6 = **3**

Das bedeutet.
Hätte derFußballer ∞ oft je fünf Versuche, so würde er *im Durchschnitt* μ =3 Treffer erzielen.



Ebenso könnte man die Varianz auf zwei Arten rechnen.
Formel 5.4 liefert σ^2 = 5. 0,6 . 0,4 = 0,12 **σ = 0,346**

5.3 Die Polynomialverteilung:

Hier hat unser Experiment nicht zwei sondern mehrere Ausgänge, nämlich die ***disjunkten*** Ereignisse $A_1,A_2,\ldots\ldots A_s$ (Erfolge) mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1,p_2,\ldots\ldots p_s$. $A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots A_s=\Omega$, $p_1+p_2+\ldots\ldots p_s=1$. Wir führen wieder n ***unabhängige*** Experimente durch und suchen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir k_1 mal das Ereignis A_1, k_2 mal das Ereignis A_2 ....k_s mal das Ereignis A_s erhalten
Beispielsweise soll zuerst ununterbrochen das Ereignis A_1 eintreten, dann A_2 und so weiter, die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$p(\underbrace{A,A,\ldots\ldots A_1}_{k_1\text{ Mal}}\ \underbrace{A_2,A_2\ldots\ldots}_{k_2\text{ Mal}}\ A_2,\ldots\ldots\ldots\ \underbrace{A_s,A_s\ldots\ldots A_s}_{k_s\text{ Mal}}) = p_1^{k1}.p_2^{k2}\ldots\ldots p_s^{ks}$$

....

Nun können die Ereignisse A_1 bis A_s auch in beliebigen anderen Reihenfolgen auftreten. Wie viele Möglichkeiten gibt es hiefür? Dieses Problem kennen wir schon aus der Kombinatorik: *Permutationen mit Wiederholungen*: Wir haben $n = k_1+k_2+.......+ k_s$ Elemente, von welchen sich A_1 genau k_1 mal wiederholt, A_2 genau k_2 Mal und so weiter. Die Anzahl der Möglichkeiten ist

$$(k_1 + k_2 + ...k_s)! / (k_1! \,.\, k_2! \,. \quad .....k_s!)$$

Daraus ergibt sich folgendes Gesetz:

Ein Experiment mit s disjunkten Ausgängen $A_1 ...A_s$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1....p_s$ wird n mal unabhängig durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei der Ausgang A_i genau k_i Mal eintritt ist:

$$p(k_1, k_2, ...k_s) = \frac{n!}{k_1!.k_2!........k_s!} . p_1^{k_1} . p_2^{k_2} .... p_s^{k_s}$$

$$(k_1 + k_2 +........+k_s = n \qquad p_1 + p_2+ ....+p_s = 1)$$

Hier gibt es s unabhängige Zufallsvariablen, jede hat einen Erwartungswert: $\mu_i = n.p_i$ (ohne Beweis)

Beispiel 5.5
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Verkehrampel rot ist beträgt 60%, für gelb beträgt sie 10% und für grün beträgt sie die restlichen 30%.

Ein Autofahrer fährt 5 Mal bei dieser Ampel vorbei. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie dabei
a) immer rot ist? b) 3 mal grün, 2 mal rot und einmal gelb ist c) höchstens einmal rot ist

Lösung:
a) A_1 (rot) ...$p_1 = 0,6$, $k_1 = 5$ A_2 (gelb) ...$p_2 = 0,1$, $k_2= 0$ A_3 (grün)...$p_3 = 0,3$, $k_3= 0$

$p(5, 0, 0) = (5! / 5!).0,6^5 \,.\, 0,1^0 \,.\, 0,3^0 = 0,07776$

b) $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 3$ $p(2, 1, 3) = (5! / 2! \,.\, 3!).0,6^2 \,.\, 0,1^1 \,.\, 0,3^3 = 20 \,.\, 0,36 \,.\, 0,1 \,.\, 0,027 = 0,01944$

c) Da nur eine der drei Eigenschaften eine Rolle spielt, nämlich „rot“ rechnen wir nicht mit der Polynomialverteilung sondern mit der Binomialverteilung.

A „rot“ ....p = 0,6 und A' = „nicht rot“ mit q = 0,4

P(höchstens einmal rot) = p(niemals rot) + p(genau einmal rot) = $1 \,.\, 0,6^0 \,.\, 0,4^5 + 5.\, 0,6 \,.\, 0,4^4$

Beispiel 5.6
Die Wahrscheinlichkeit, dass Oberarzt 1 Nachtdienst macht beträgt 50%, die Wahrscheinlichkeit, dass Oberarzt 2 Nachtdienst macht, beträgt 30% und die Wahrscheinlichkeit, dass Herr Primarius Nachtdienst macht beträgt 20%. Jemand kommt dreimal in größeren Abständen in das Spital. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) Jedes mal ein anderer Arzt Nachtdienst hat? $p(1 , 1, 1) = 3! \,.\, 0,5 \,.\, 0,3 \,.\, 0,2 = 0,18$

b) Einmal Oberarzt 2 und zweimal der Primarius Nachtdienst hat? $p(0,1,2) = (3! / 2!) \,.\, 0,5^0 \,.\, 0,3^1 \,.\, 0,2^2$

c) Immer Herr Primarius Nachtdienst hat? Da nur ein einziges Ereignis eine Rolle spielt, benutzen wir wieder die Binomialverteilung: p(Primarius) = 0,2 $\Rightarrow$ q = p(nicht Primarius) = 0,8 p(drei mal Primarius) = $1.\, 0,2^3.0,8^0 = 0,008$

d) höchstens zwei mal der Primarius Nachtdienst macht:

p = p(nicht drei mal der Primarius) = 1 – p(drei Mal der Primarius) = 0,002

5.4 Die Hypergeometrische Verteilung

Beispiel 5.7:
In einer Urne befinden sich N = 13 Kugeln: $N_1= 6$ schwarze, $N_2 = 4$ rote und $N_3= 3$ grüne Kugeln. Wir ziehen n = 9 mal *ohne Zurücklegen.* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei $n_1 = 4$ mal die schwarze Kugel, $n_2= 3$ mal die rote Kugel und $n_3= 2$ mal die weisse Kugel kommt?

Lösung:
Eine (von vielen) Möglichkeiten ist bespielsweise, dass zuerst alle schwarzen, dann alle roten und zuletzt alle weissen Kugeln gezogen werden:

s s s s r r r w w

Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist:

$$p = \frac{6.5.4.3}{13.12.11.10}\cdot\frac{4.3.2}{9.8.6}\cdot\frac{3.2}{5.4} = \frac{\binom{6}{4}.4!.\binom{4}{3}.3!.\binom{3}{2}.2!}{\binom{13}{9}.9!}$$

Nun gibt es aber genau 9! / (4! . 3! . 2!) verschiedene Reihenfolgen für die Anordnung der schwarzen, roten und weissen Kugeln (Permutationen mit Wiederholung). Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{\binom{6}{4}.4!.\binom{4}{3}.3!.\binom{3}{2}.2!}{\binom{13}{9}.9!}\cdot\frac{9!}{4!.3!.2!} = \frac{\binom{6}{4}.\binom{4}{3}.\binom{3}{2}}{\binom{13}{9}} = \frac{\binom{N_1}{n_1}.\binom{N_2}{n_2}.\binom{N_3}{n_3}}{\binom{N}{n}}$$

Man kann dieses Ergebnis auch auf anderem Wege erhalten:
Wir numerieren alle Kugeln unabhängig von ihrer Farbe fortlaufend mit den Nummern 1 bis 13, so daß jede Kugel verschieden ist.

s	s	s	s	s	s	r	r	r	r	w	w	w
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

man wählt zunächst vier schwarze Kugel aus, z.B.: 2,4,5,6. Hiefür gibt es $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten. Für jede dieser Möglichkeiten gibt es wieder $\binom{4}{3}$ Möglichkeiten für die Auswahl der roten Kugel und zuletz1 $\binom{3}{2}$ Wahlmöglichkeiten für die weissen Kugeln, also $\binom{6}{4}.\binom{4}{3}.\binom{3}{2}$ Möglichkeiten (= Anzahl der *günstigen Fälle)*

Insgesamt gibt es $\binom{13}{9} = \frac{13!}{9!.4!}$ Möglichkeiten (Kombinationen), 9 Elemente aus 13 Elementen auszuwählen.

Die Wahrscheinlichkeit ist also: $P = \dfrac{\binom{6}{4}.\binom{4}{3}.\binom{3}{2}}{\frac{13!}{9!.4!}}$

Das allgemeine Problem lautet so:

Von N gegebenen Elementen haben N_1 Elemente die Eigenschaft E_1, N_2 Elemente die Eigenschaft E_2 ....N_s Elemente die Eigenschaft E_s. $N = \Sigma N_\iota$
Man wählt n < N Elemente ohne Zurücklegen aus. ($n = \Sigma n_i$). Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei n_1 mal die Eigenschaft E_1, n_2 mal die Eigenschaft E_2 ....n_s mal die Eigenschaft E_s vorkommt ist:

$$P(n_1..n_s; N_1.......N_s) = \frac{\binom{N_1}{n_1}.\binom{N_2}{n_2}.............\binom{N_s}{n_s}}{\binom{N}{n}} \qquad N = N_1 + N_2 .... + N_s \qquad n = n_1 + n_2 + ... + n_s$$

Die Verteilung der Variablen $n_1, n_2, ...n_s$ heißt auch *hypergeometrische Verteilung*.

Beispiel 5.8
In einem Kurs sitzen 12 Iraner, 10 Chinesen und 8 Türkische Studenten. Die Studenten werden beim Bonustest nach Zufall auf zwei Räume aufgeteilt. Im Raum A haben 14 Personen Platz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass für diesen Raum 2 Iraner, 8 Chinesen und 4 Türken ausgewählt werden.

Lösung: $p(2,8,4\ ;\ 12,10,8)=\dfrac{\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{8}\cdot\binom{8}{4}}{\binom{30}{14}}$

Beim Ziehen ohne Zurücklegen bestimmen sich die Wahrscheinlichkeiten nach der hypergeometrischen Verteilung. Man verwendet sie vor allem dann, wenn man mit einer großen Zahl von elementen arbeitet

Beispiel 5.8 (= Beispiel 3.5 d)
In einer Urne befinden sich vier rote, drei grüne und zwei weisse Kugeln. Wir ziehen zwei Mal ***ohne*** Zurücklegen (das bedeutet, dass der zweite Zug abhängig vom ersten Zug ist) .Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln rot sind:
Lösung ohne hypergeometrische Verteilung:

p = p(1.Kugel rot $\cap$ (2.Kugel rot unter der Bedingung, dass 1.Kugel rot)) =
= p (1. Kugel rot) . p (2. Kugel rot / erste Kugel rot) = 4/9 . 3/8 = 1/6

Lösung mit hypergeometrischer Verteilung:

$N=9$, $N_1=4$, $N_2=3$, $N_3=2$; $n=2$, $n_1=2$, $n_2=n_3=0$ $\Rightarrow$ $p=\dfrac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{0}\cdot\binom{2}{0}}{\binom{9}{2}}=\dfrac{6.1.1}{36}=\dfrac{1}{6}$

Aufgaben

5.11 Ein Student lernt für eine bestimmte Prüfung genau ¼ eines gesamten sehr umfangreichen Lehrstoffes. Die Wahrscheinlichkeit, eine Frage richtig zu beantworten, darf hier mit p = 25%= constant angenommen werden. Der Student erhält vier Fragen. Die Prüfung ist positiv, wenn mindestens drei Fragen richtig beantwortet werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit
a) alle vier Fragen richtig zu beantworten b) keine Frage richtig zu beantworten c) Die Prüfung positiv abzuschließen. d) die Prüfung negativ abzuschließen!

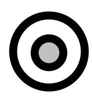
5.2 Ein Student lernt genau die Hälfte des vorgeschriebenen sehr umfangreichen Prüfungsstoffs . Bei einer „Multiple-Choice-Prüfung“ kommen 8 Hauptfragen mit je 4 Teilfragen.
Eine Hauptfrage gilt als richtig beantwortet, wenn ***alle*** Teilfragen richtig beantwortet sind. Die Prüfung ist positiv, wenn mindestens 6 Hauptfragen richtig sind! Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit
a) bei einer zufällig ausgewählten Hauptfrage alle Teilfragen richtig zu beantworten
b) genau eine von 8 Hauptfragen richtig zu beantworten
c) keine der 8 Hauptfragen richtig zu beantworten d) Die Prüfung positiv abzuschließen?

5.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim zehnmaligen Würfeln mit einem „gerechten“ Würfel
a) keine „Sechs“ zu bekommen“ b) genau dreimal eine „Sechs“ zu bekommen
c) mindestens eine „Sechs“ zu bekommen d) höchstens zweimal eine „Sechs“ zu bekommen

5.4 Für einen verfälschten Würfel gelten folgende Wahrscheinlichkeiten p(X=6)= 50%, p(X=1) = 30%, p(X=2,3,4,5)=20% Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Würfen
a) zweimal die „Sechs“ und dreimal die „Eins“ zu bekommen b) niemals die „Sechs“ und genau dreimal die „Eins“ zu bekommen c) nur „Sechsen“ zu bekommen“

5.5 Ein Gewehrschütze triff mit der Wahrscheinlichkeit p = 0,4 in einen Kreis am Ziel. In einem Wettbewerb werden folgende Spielregeln vereinbart. Er muss 5 mal schießen. Wenn er immer trifft, bekommt er 100€, wenn er mindestens drei mal trifft bekommt er 10€, ansonsten muss er einen bestimmten Betrag von x € bezahlen. a) Berechnen Sie x unter Benutzung des Erwartungswertes μ=0! Berechnen Sie die Varianz!

5.6 Ein Gewehrschutze trifft mit p = 25% in den inneren Kreis der Zielscheibe (Bild), mit p = 35% in den äußeren Kreisring. Mit der restlichen Wahrfscheinlichkeit trifft er überhaupt nicht.. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei 7 Schüssen:
a) niemals trifft b) einmal in den Inneren und dreimal in den äußeren Kreis trifft c) genau einmal in den Inneren Kreis trifft e) mindestens einmal in den inneren Kreis trifft?



5.7 Zur Abschlussprüfung aus dem Fach "Mathematik" stehen heuer für 20 Kandidaten drei Prüfer zur Verfügung. Professor ***"Streng"*** prüft um 7^{30}h, und nimmt 7 Kandidaten. Die Wahrscheinlichkeit, bei ihm die Prüfung zu bestehen beträgt 40%, wenn man alles gelernt hat. Professor "***Mildauer"*** prüft um 13^{30} hat eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 70% und nimmt 5 Kandidaten. Der Rest wird von Professor ***"Studentenjäger"*** geprüft, der eine Durchfallsquote von 80% hat.

Alle Studenten haben sich vollständig vorbereitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass heuer
a) alle Kandidaten durchfallen? b) kein Kandidat dürchfällt? c) genau ein Kandidat durchfällt?

5.8 Am Vorstudienlehrgang hat man für das Wintersemster folgende Anmeldezahlen für Anfängerkurse: 200 Iraner, 300 Chinesen 400 sonstige. Die 20 Studenten im Anfängerkurs A1 werden rein zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Kurs
a) sich genau aus 10 Chinesen und 10 Iranern zusammensetzt ! b) genau 5 Chinesen hat!
c) sich ausschließlich aus Chinesen zusammensetzt! c) mindestens einen Iraner hat!

5.9 In einer Gruppe von 100 Personen sind 30% an einer schweren Infektionskrafkheit erkrankt (K), weiter 40% sind infiziert, die Krankheit ist bei ihnen aber noch nicht ausgebrochen (I), der Rest ist nicht infiziert (N). Es wird eine Kleingruppe von 10 Personen ausgewählt: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von ihnen
a) drei Personen krank und vier weiter infiziert sind b) drei Personen krank und sieben nicht infiziert sind
c) niemand infiziert ist? d) alle infiziert aber niemand krank ist? e) alle krank sind?

5.10 Rechnen Sie die Aufgabe 5.9 näherungsweise für eine sehr große Gruppe unbekannter Größe!

5.11 Im chinesischen Restaurant "Wa-Schei-Li-Kai" sind zu Beginn des Mittagsmenüs 20 Frühlingsrollen, 10 Hühnersalate und 30 Fleischbällchen fertig gestellt. Der Koch plaudert mit seiner hübschen Kollegin und stellt zunächst 10 Teller auf das Förderband, ohne sich den Inhalt anzusehen. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) dabei genau 5 Frühlingsrollen und 3 Hühnersalate auf das Band kommen
b) kein Hühnersalat auf das Band kommt c) genau eine Frühlingsrolle auf das Band kommt?
d)10 Teller mit genau der gleichen Speise auf das Band kommen?
e) je fünf Teller mit genau der gleichen Speise auf das Band kommen?

5.12 Zur Prüfung aus "Deutsch" haben sich 10 Chinesen, 16 Iraner und 19 Araber angemeldet. Professor "Richter" prüft am Vormittag 7 Studenten. Er ist bei den Chinesen sehr gefürchtet, weil sie immer Professor "Lichter" zu ihm sagen. Professor "Reiter" prüft am Nachmittag und ist ein großer Freund der chinesischen Studenten. die Sekretärin von Professor "Richter" wählt" aus den Anmeldungen ***rein zufällig*** 7 Studenten aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei
a) 3 Chinesen, 3 Iraner und 1 Araber sind? b)alle Kandidaten Chinesen sind?
c) genau 5 Kandidaten Chinesen sind c)kein Kandidat aus China kommt?

5.13 Herr S geht gerne ins Gasthaus. Dort arbeiten vier Personen in der Bedienung. In Kellnerin A ist Herr S verliebt, sie arbeitet an 10 Tagen im Monat, Kellnerin B gefällt ihm auch sie arbeitet an fünf Tagen im Monat. Die restlichen Arbeitstage teilen sich zwei männliche Kellner, an denen Herr s nicht interessiert ist. Eineteilung der Arbeitskräfte erfolgt fast zufällig. Herr S besucht in größeren Abständen fünf mal dieses Gasthaus: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihn
a) drei mal Frau A und zwei mal Frau B bedient? b) einmal Frau B und niemals Frau A bedient
c) immer Frau A bedient b)4 mal Frau A bedient? c) niemals Frau A bedient?

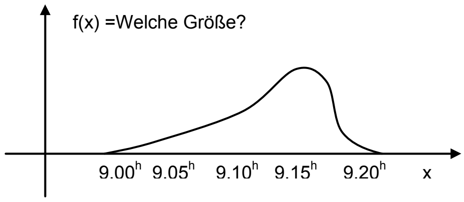
5.14 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Telephonanschluss besetzt ist, beträgt 30%. Man ruft in größeren Abständen 10 Mal an. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Anschluß
a) 10 mal frei ist b) 10 mal besetzt ist c) mindestens ein mal besetzt ist
d) höchstens einmal besetzt ist e) mindestens einal frei ist
f) höchstens zweimal frei ist?

5.15 Der Geographie-Lehrer hat für die Prüfung 30 Fragen vorbereitet: Zehn Fragen über Österreich, zehn Fragen über Europa (ohne Österreich) und zehn Fragen über die Restliche Welt. Der Kandidat darf drei Fragen völlig frei ziehen. Wie groß ist die Wahrcheinlichkeit, dass
a) alle Fragen aus verschiedenen Teilgebieten der Geographie sind
b) alle Fragen über Österreich gezogen werden? c) keine Frage über Österreich gezogen wird?
d) mindestens eine Frage über Österreich gezogen wird?

5.16 Beweisen Sie
a) Für den Erwartungswert einer binomial verteilten Zufallsvariablen gilt μ= n.p
b) Für die Varianz einer binomial verteilten Zufallsvariablen gilt σ^2 = n.p.q

6. Kontinuierliche Verteilung und Dichtefunktion

Bei den diskreten Verteilungen nimmt die Zufallsvariable nur einzelne getrennte Werte an. Sehr oft kommt es aber vor, dass die Zufallsvariable alle reellen Werte eines bestimmten Intervalls oder der gesamten Zahlengeraden annimmt.

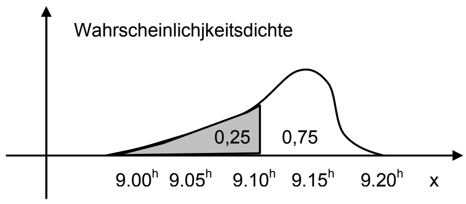


Beispiel:
Es sei bekannt, dass ein Eisenbahnzug zwischen 9^hund 9.20^h ankommt. Die Zufallsvariable ist die Ankunftszeit x. Das Zeitintervall enthält unendlich viele Zeitpunkte. Grundsätzlich ist jeder Zeitpunkt möglich. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zug zu einem bestimmten Zeit**punkt** ankommt ist allerdings gleich Null, weil

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{\textbf{Anzahl der günstigen Fälle}}{\textbf{Anzahl der möglichen Falle}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

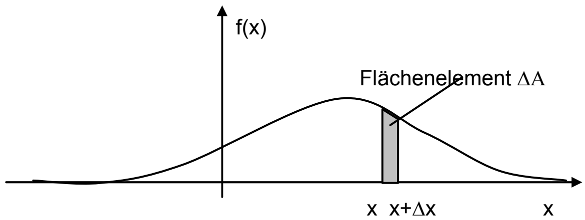
Trotzdem zeigt die Kurve, dass ein Eintreffen des Zuges eher um 9.15^h und nicht so sehr 9.05^h erwartet werden kann.
Welche Größe stellt nun die vertikale Achse f(x) dar? Es kann sich nicht um Wahrscheinlichkeit handeln, denn diese ist in jedem Punkt gleich Null. Das Problem wird mit der sogenannten *Dichtefunktion* gelöst:

6.1 Dichtefunktion



Bei dieser Funktion wird nicht die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen *Punktes* durch den Funktionswert (Höhe) der Kurve dargestellt, sondern die Wahrscheinlichkeit für ein *Intervall* durch *eine Fläche*.
Beispielsweise beträgt in der nebenstehenden Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass ein Eisenbahnzug zwischen 9.00^h und 9.10^h ankommt 25%.
Die Wahrscheinlichkeit, dass er danach ankommt 75%.

Die Kurve y = f(x) muss so verlaufen, dass die Fläche unter der Kurve für *jedes* Intervall die richtige Wahrscheinlichkeit ergibt. Das muss auch für jedes beliebige Intervall gelten, also auch für beliebig kleine Intervalle

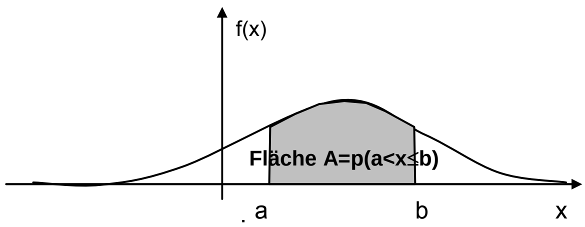


Daher muss das Flächenelement ΔA unter der Kurve im Intervall $[x, x + \Delta x]$ die Wahrscheinlichkeit darstellen, dass die Zufallsvariable zwischen x und $x + \Delta x$ liegt:

p(x< Zufallsvariable $\leq x+\Delta x$) = Flächenelement $\Delta A \approx f(x).\Delta x$

Das „ungefähr gleich" geht über in ein „genau gleich", wenn $\Delta x \rightarrow 0$ geht, man schreibt dann bekanntlich „dx":

p (x<Zufallsvariable≤x+dx) = f(x).dx



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable in einem größeren Intervall liegt, ergibt sich dann von selbst durch das Integral:

p(a< x ≤b) = $\int_a^b f(x)dx$ = Fläche A

Die Fläche unter der gesamten Kurve ist dann gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable x alle möglichen Werte annimmt (*sicheres Ereignis),*also gleich 1:

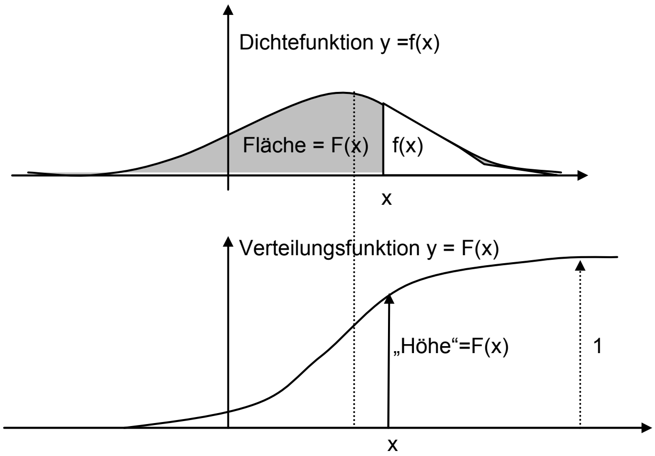
$$p(-\infty < x \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad \text{(6.1a)}$$

Erwartungswert und Varianz:

$$\text{Erwartungswert:}\quad \mu = \sum_i p(x_i).x_i = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \qquad (6.1b)$$

$$\text{Varianz:}\quad \sigma^2 = \sum_i p(x_i).x_i^{\,2} - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 \qquad (6.1c)$$

Verteilungsfunktion



Die *Verteilungsfunktion F(x)* gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable kleiner oder gleich x ist. Sie ist also eine Art *kumulierter* Dichtefunktion:

$$p(Zufalls\,\mathrm{var}\,iable \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx = F(x) - F(0) = F(x)$$

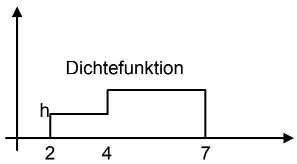
Die Verteilungsfunktion F(x) ist eine Stammfunktion der Dichtefunktion f(x). F'(x) = f(x).

Beispiel 6.1
Ein Eisenbahnzug kommt sicher zwischen x=2 und x=7 an (die Zufallsvariable x beschreibt Zeiteinheiten). Die Wahrscheinlichkeit ist im Zeitintervall]2 | 4] zu jedem Zeitpunkt gleich und im Zeitintervall]4 | 7] ebenfalls zu jedem Zeitpunkt gleich aber doppelt so groß wie im ersten Intervall. Bestimmen Sie

a) Funktionsterm und Graphen von Dichtefunktion und Verteilungsfunktion!
b) Die Wahrscheinlichkeit dass der Zug genau zum Zeitpunkt x = 3 ankommt!
c) Die Wahrscheinlichkeit dass der Zug im Zeitintervall]1 | 5] ankommt
d) Die Wahrscheinlichkeit dass der Zug im Zeitintervall]5 | 6] ankommt unter der Bedingung, dass er bis zum Zeitpunkt x=4 nicht angekommen ist.
e) Den Erwartungswert und die Varianz für die Ankunftszeit!

Lösung:

a) *Dichtefunktion:* Der Graph y=f(x) ist abgebildet. Die Höhe h muss so bestimmt werden, dass die gesamte Fläche gleich 1 ist. A =2h +3.2h = 1 ⇒ h=1/8



$$f(x) = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}rx \le 0 \quad und \quad 7 < x \\ \mathbf{\dfrac{1}{8}} & f\ddot{u}r \quad 2 < x \le 4 \\ \mathbf{\dfrac{1}{4}} & f\ddot{u}r \quad 4 < x \le 7 \end{cases}$$

Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = \begin{cases} 0 \qquad f\ddot{u}r \qquad x<0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{x} f(x)dx = 0 + [\frac{1}{8}x]_2^x = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4} \qquad f\ddot{u}r \quad 2<x\le 4 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{x} f(x)dx = 0 + [\frac{1}{8}x]_2^4 + [\frac{1}{4}x]_4^x = 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - 1 = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} \qquad f\ddot{u}r \quad 2<x\le 4 \end{cases}$$

b) p(x=3) = 0 (die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable x **genau einen** Punkt annimmt, ist gleich Null)

c) p(1< x ≤5) = „Fläche unter der Dichtefunktion im Intervall]1 | 5]“ = 0 +h(4 –2) + 2h(5 – 4) = 4h = 0,5

d) p(5<x≤6) = p(Ereignis A) = 2h = 0,5; p(4<x) = p (Ereignis B) = 3.2h = 0,75 Es gilt hier: A∩B = A

p(A | B) = p(A∩B) / p(B) = 0,5 / 0,75 = $^2/_3$

e)

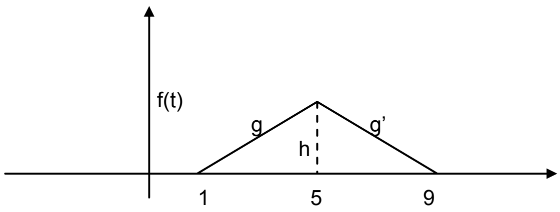
$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = 0 + \int_2^4 \frac{1}{8}xdx + \int_4^7 \frac{1}{4}xdx = \frac{12}{16} + \frac{33}{8} = 4{,}21$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2.f(x)dx - \mu^2 = 0 + \int_2^4 \frac{1}{8}x^2dx + \int_4^7 \frac{1}{4}x^2dx = [\frac{x^3}{24}]_2^4 + [\frac{x^3}{12}]_4^7 = \frac{56}{24} + \frac{279}{12} = 23{,}44$$

$\sigma^2 = 23{,}44 - 4{,}21^2 = 5{,}71 \Rightarrow \sigma = \pm\sqrt{5{,}71} = \pm 2{,}93$

Beispiel 6.2:
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Telephonanruf eintrifft, ist durch die abgebildete Dichtefunktion gegeben

a) Bestimmen Sie h so, dass die Funktion eine Dichtefunktion darstellt!
b) Bestimmen Sie den Funktionsterm!
c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Anruf vor dem Zeitpunkt x = 4 eintrifft!
d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Anruf zwischen x=2 und x=4 eintrifft!
e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Anruf früher als x=4 eintrifft **unter der Bedingung,** dass er vor x=5 eintrifft

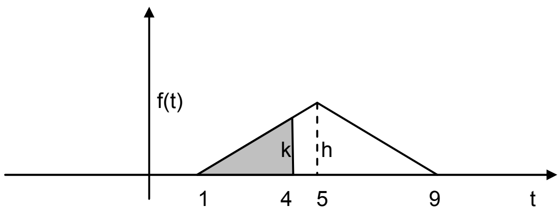


Lösung:

a) Die Gesamtfläche muss gleich 1 sein: A_{gesamt} = Basis x Höhe / 2 = 8.h / 2 = 4h = 1 $\Rightarrow$ h = ¼
b) Die Gerade g geht durch (0│1) und hat die Steigung $k_g = h/4 = {}^1/_{16} = 0{,}0625$:
$(y - 0) = {}^1/_{16} (x-1) \quad \Rightarrow \quad g: y = {}^1/_{16}x - {}^1/_{16}$
Die Gerade g' geht durch (0│9) und hat die Steigung $k_g = -h/4 = -{}^1/_{16} = -0{,}0625$:
$(y - 0) = -{}^1/_{16} (x-9) \quad \Rightarrow \quad g': y = -{}^1/_{16}x + {}^9/_{16}$

Der Funktionsterm lautet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le 1 \text{ und für } x > 9 \\ {}^1/_{16}x - {}^1/_{16} & \text{für } 1 < x \le 5 \\ = -{}^1/_{16}x + {}^9/_{16} & \text{für } 5 < x \le 9 \end{cases}$$

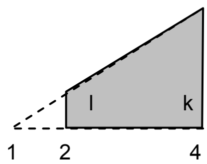


c) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist die Fläche unter dem Funktionsgraphen im Intervall (1│4]
k/3 = h/4 $\Rightarrow$ k = 3h/4 = 3/16
p = Dreiecksfläche = BasisxHöhe/2 = 3.k/2 = 9/32 = 0,28125 (28,125%)

Eine andere Möglichkeit ist die Berechnung mittels Integral:

$$p = \int_{-\infty}^{4} f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx = \int_1^4 (0{,}0625x - 0{,}0625)dx = [0{,}03125x^2 - 0{,}0625x]_1^4 = 0{,}28125$$

d) p =Trapezfläche = Basisx(Höhe$_1$ + Höhe$_2$)/2 = 2(l+k)/2 = l+k = k/3+k = 4k/3 = 1/4:

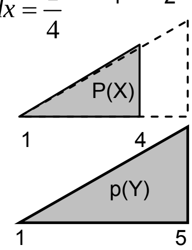


Die Berechnung mittels Integral muss dasselbe ergeben: $p = \int_2^4 (0{,}0625x - 0{,}0625)dx = \frac{1}{4}$

e) Ereignis X: DerAnruf trifft vor dem Zeitpunkt t = 4 ein: p(X) = 0,28125

Ereignis Y: Der Anruf trifft vor dem Zeitpunkt t = 5 ein: p(Y) = ½

Ereignis X∩Y: X∩Y = X $\quad p(X|Y) = \frac{p(X \cap Y)}{p(Y)} = \frac{0{,}28125}{0{,}5} = 0{,}5625$



Beispiel 6.2a

Bestimmen Sie mit den Angaben von Beispiel 6.2
a) Funktionsterm und Graph der Verteilungsfunktion! b) den Erwartungswert! c) die Varianz!
a) Lösung:

1.Fall: $x \le 1$
$f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = 0$

2.Fall: $1<x\le 5$
$f(x) = {}^1/_{16}\,x - {}^1/_{16} \Rightarrow F(x) = {}_{-\infty}\!\int^x f(x)dx = 0 + {}_1\!\int^x f(x)dx$
$= [{}^1/_{32}\,x^2 - {}^1/_{16}x]_1^x =$

$\underline{\mathbf{= {}^1/_{32}\,x^2 - {}^1/_{16}\,x + {}^1/_{32}}}$ z.B.:: $F(4) = {}^9/_{32}$, $F(5) = ½$

3.Fall: $5<x\le 9$
$f(x) = -{}^1/_{16}\,x + {}^9/_{16} \Rightarrow F(x) = {}_{-\infty}\!\int^x f(x)dx = {}_1\!\int^5 f(x)dx + {}_5\!\int^x f(x)dx$
$= ½ + {}_5\!\int^x f(x)dx = ½ + [-{}^1/_{32}\,x^2 + {}^9/_{16}x]_5^x =$

$\underline{\mathbf{= -{}^1/_{32}\,x^2 + {}^9/_{16}x - {}^{49}/_{32}}}$ z.B.: ($F(5) = ½$), $F(9) = 1$

4.Fall: $9<x$ gilt $f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = 1$

b) $\mu = {}_{-\infty}\!\int^{+\infty} x.f(x)dx = {}_1\!\int^5 ({}^1/_{16}\,x^2 - {}^1/_{16}x)dx + {}_5\!\int^9(-{}^1/_{16}\,x+{}^9/_{16}).dx = [{}^1/_{48}x^3 - {}^1/_{32}x^2]_1^5 + [-{}^1/_{48}x^3 + {}^9/_{32}x^2]_5^9 = \underline{\mathbf{5}}$

c) $\sigma^2 = {}_{-\infty}\!\int^{+\infty} x^2.f(x)dx - \mu^2$

${}_{-\infty}\!\int^{+\infty} x^2.f(x)dx = {}_1\!\int^5 ({}^1/_{16}\,x^3 - {}^1/_{16}x^2)dx + {}_5\!\int^9(-{}^1/_{16}\,x^3+{}^9/_{16}x^2).dx = [{}^1/_{64}x^4 - {}^1/_{48}x^3]_1^5 + [-{}^1/_{64}x^4 + {}^9/_{48}x^3]_5^9 = \underline{\mathbf{27{,}66}}$

$\sigma^2 = 27{,}66 - 25 = 2{,}66$ $\quad \sigma = \sqrt{2{,}66} = \underline{\mathbf{1{,}63}}$

Beispiel 6.3

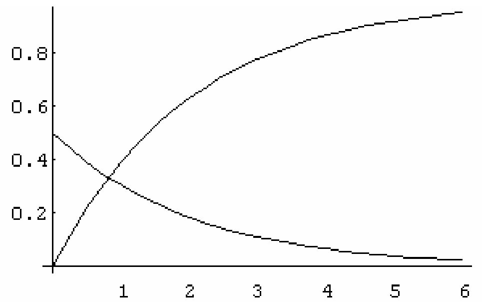
Der Todeszeitpunkt eines Bakteriums ist durch die Dichtefunktion $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t\le 0 \\ C.e^{-½ t} & \text{für } t>0 \end{cases}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Konstante C sowie Graph und Funktionsterm der Verteilungsfunktion!
b) Erwartungswert und Varianz!

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
c) das Bakterium genau im Zeitpunkt t = 5 stirbt!
d) den Zeitpunkt t = 5 nicht überlebt!
e) den Zeitpunkt t = 5 überlebt (Ereignis X) unter der Bedingung, dass es den Zeitpunkt t=4 überlebt hat (Ereignis Y)!
f) Die Wahrscheinlichkeit, den Zeitpunkt t = x zu überleben, soll 10% betragen. Berechnen Sie t!

Lösung:
a) Fläche = $C.\ {}_0\!\int^\infty e^{-½ t}\,dt = -2C\,[e^{-½ t}]_0^\infty = 2C = 1 \Rightarrow C = ½ \Rightarrow f(t) = ½.\ e^{-½ t}$ für $t>0$

Verteilungsfunktion: $F(t) = ½.\ {}_0\!\int^\infty e^{-½t}.dt = [e^{-½}.]_0^t = \underline{\mathbf{1 - e^{-½}}}$ für $t>0$
und $F(t) = 0$ für $t\le 0$



b) Erwartungswert: $\mu = ½.\ {}_0\!\int^\infty t.e^{-½t}.dt = \underline{\mathbf{2}}$
Varianz: $½.\ {}_0\!\int^\infty t^2\, e^{-½t}.dt = 8 \Rightarrow \sigma^2 = 8 - 2^2 = 4$ $\quad \underline{\mathbf{\sigma = 2}}$

c) $p(t=5) = 0$ $\quad$ d) $p(0<t\le 5) = p(\text{Ereignis } X) = ½.\ {}_0\!\int^5 e^{-½}.dt = 0{,}918$

e) $p(5<t) = 1 - p(0<t\le 5) = p(X) = 0{,}082$
$p(4\le t) = p(Y) = ½.\ {}_4\!\int^\infty e^{-½}.dt = 0{,}135$ $\quad X\cap Y = Y$ $\quad p(X|Y) =$
$p(X\cap Y) / p(Y) = 0{,}082 / 0{,}135 = \underline{0{,}607} \approx 61\%$

f) $½.\ {}_x\!\int^\infty e^{-½xt}.dt = e^{-½ x} = 0{,}1 \Rightarrow x = 4{,}6$

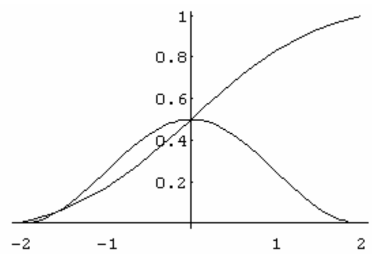
Beispiel 6.4

Die Wahrscheinlichkeit, beim Schießen mit einem Gewehr einen bestimmten Punkt auf der x-Achse zu treffen, wird duch folgende Dichtefunktion y = f(x) angegeben:

$f(x) = \cos^2 {}^\pi/_4\, x$ für $|x|\le 2$ und $f(x) = 0$ für alle anderen Werte von x.

a) Bestimmen Sie a so, dass f(x) eine Dichtefunktion ist! Bestimmen Sie μ ! Skizzieren Sie die Graphen der Dichtefunktion und der Verteilungsfunktion!

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau den Punkt x=1 zu treffen
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Punkt x=0 um mehr als 1 zu verfehlen?
d) Berechnen Sie die Varianz: (sehr aufwendig)



Lösung:

a) $C \cdot {}_{-2}\int^{+2} \cos^2 \frac{\pi}{4} x.dx = C. [(\pi x + 2.\sin \frac{\pi}{2} x) / 2\pi]_{-2}^{+2} = 2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Erwartungswert: $\mu = 0$ wegen der Symmetrie der Dichtefunktion bezüglich des Nullpunkts.

b) $p(x=1)= 0$

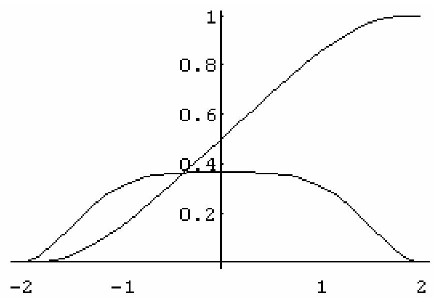
c) Die Wahrscheinlichkeit, den Nullpunkt um weniger als 1 zu verfehlen, ist
$p(-1<x\leq 1) = \frac{1}{2} \, {}_{-1}\int^{+1} \cos^2 \frac{\pi}{4} x.dx = 0{,}81$
Die Wahrscheinlichkeit, den Nullpunkt um **mehr**als 1 zu verfehlen, ist
$p(|x|>1) = 1 - 0{,}81 = 0{,}19$

d) Varianz: ${}_{-\infty}\int^{+\infty} x^2 f(x)= \frac{1}{2} \cdot {}_{-2}\int^{+2} x^2 \cos^2 \frac{\pi}{4} x.dx = 0{,}523$
(Die Berechnung des Integrals ist sehr aufwendig und keine Prüfungsaufgabe)

$\sigma^2 = 0{,}523 - 0 \qquad \sigma= \sqrt{0{,}523} = 0{,}72$

Beispiel 6.5

Gegeben sei die $f(x) = C (x^6 - 6x^4 + 32)$ für $|x|<2$ und $f(x) = 0$ sonst.
a) Bestimmen Sie C so, dass f(x) eine Dichtefunktion ist und den Funktionsterm der Verteilungsfunktion!
b) Skizzieren Sie grob die Dichtefunktion und Verteilungsfunktion!
c) Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz!
d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für $|x|>1$!



Lösung:
a) ${}_{-\infty}\int^{+\infty} f(x)dx = C \cdot {}_{-2}\int^{+2} (x^6 - 5x^4 + 32)dx = 1 \Rightarrow C \cdot 87{,}7714 = 1 \quad C = \frac{1}{87{,}7714} \approx 0{,}0114$

für $-2<x\leq 2$ gilt:
$F(x) = {}_{-\infty}\int^{x} f(x)dx = {}_{-2}\int^{+x} (x^6 - 6x^4 +32)dx = \frac{1}{87{,}7714} .[x^7 / 7 + 6x^5 / 5 + 32x]_{-2}^{x}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{87{,}7714} (x^7 / 7- 6x^5 /_5 + 32x + 43{,}8857) & \text{für } -2 < x \leq 2 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

b) $\mu = 0$ (Symmetrie der Dichtefunktion) Varianz: ${}_{-\infty}\int^{\infty} x^2.f(x)dx = \frac{1}{87{,}7714} \, {}_{-2}\int^{+2} (x^8 - 6x^6 +32x^2)dx = 0{,}74$
$\sigma^2 = 0{,}74 - 0 \qquad \sigma=\sqrt{0{,}74}= 0{,}86$

c) $p(|x|<1) = \frac{1}{87{,}7714} \cdot {}_{-1}\int^{+1} (x^6 - 6x^4 +32)dx = 0{,}705 \qquad p(|x|>1) = 0{,}295$

Beispiel 6.6
Die Dichtefunktion für die Ankunftszeit t eines Lehrers im Kursraum ist gegeben durch:

$$f(t) = at^2+bt^3+ct \quad \text{für } 0<t\leq 2$$
$$\text{und } f(t) = 0 \text{ sonst}$$

Im langfristigen Durchschnitt kommt der Lehrer genau 1,2 Minuten zu spät, weiters gilt: f(2) = 0.

a) Bestimmen Sie die Konstanten a,b und c sowie die Varianz!
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Lehrer genau eine Minute zu spät kommt?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Lehrer höchstens eine Minute zu spät kommt?

Lösung: a) $f(2) = 0 \qquad 4a + 8b + 2c = 0$

${}_{-\infty}\int^{+\infty} f(t)dt \;=\; {}_0\int^2 (at^2+bt^3+ct)dt = [at^3/_3 + bt^4/_4 + ct^2/_2]_0^2 = 1$ $\quad {}^8/_3.a + 4b + 2c = 1$

${}_{-\infty}\int^{+\infty} t.f(t)dt = {}_0\int^2 (at^3+bt^4+ct^4)dt = [at^4/_4 + bt^5/_5 + ct^3/_3]_0^2 = 1{,}2$ $\quad 4a + {}^{32}/_5.b + {}^8/_3.c = 1{,}2$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $a = {}^3/_2$, $\quad b = -{}^3/_4$, $\quad c = 0 \Rightarrow$

Dichtefunktion: $\mathbf{f(t) = {}^3/_2t^2 - {}^3/_4t^3}$ Verteilungsfunktion: $F(t) = {}_0\int^t ({}^3/_2t^2 - {}^3/_4t^3)dt = {}^1/_2t^3 - {}^3/_{16}t^4$

${}_0\int^x t^2 ({}^3/_2t^2 - {}^3/_4t^3)dt = {}_0\int^2 ({}^3/_2t^4 - {}^3/_4t^5)dt = [{}^1/_{10}t^5 - {}^3/_8t^6]_0^2 = 1{,}6$ $\quad \sigma^2 = 1{,}6 - 0$ $\quad \sigma = \sqrt{1{,}6} = 1{,}264$

b) $p(t=1) = 0$

c) $p(t\leq 1) = {}_0\int^1 ({}^3/_2t^2 - {}^3/_4t^3)dt = 7/40 \approx 31{,}25\%$

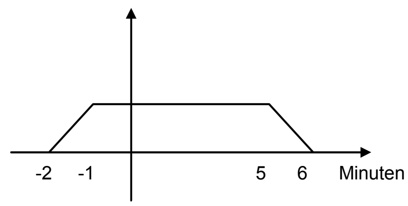
Aufgaben:
6.1 Die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen x sei $f(x) = C/(1 + x^2)$.
a) Bestimmen Sie C! b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz!
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
c) x=1 ist! d) x> 1 ist e) 1<x≤ 2 ist f) 1<x≤ 2 unter der Bedingung, dass x > 0 ist!

6.2 Die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen x sei $f(x) = C/(1 + 4x^2)$.
a) Bestimmen Sie C! b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz!
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
c) x=1 ist! d) x> 1 ist e) 1<x≤ 2 ist f) 1<x≤ 2 unter der Bedingung, dass x > 0 ist!

6.3 Die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen x sei $f(x) = C/(9 + x^2)$.
a) Bestimmen Sie C! b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz!
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
c) x=1 ist! d) x> 1 ist e) 1<x≤ 2 ist f) 1<x≤ 2 unter der Bedingung, dass x > 0 ist!

6.4 Die Dichtefunktion einer Zufallsvaruablen sei $f(x) = C.e^{-1/2\ x}$ für x >0 und f8x) = 0 sonst
a) Bestimmen Sie C! b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz!
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
c) x=1 ist! d) x> 1 ist e) 1<x≤ 2 ist f) 1<x≤ 2 unter der Bedingung, dass x > 0 ist!

6.5 Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Lehrers im Unterricht sie durch den Graphen einer Dichtefunktion gegeben:
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Lehrer
a) genau zu Beginne der Stunde kommt (x = =)
b) zu früh kommt (x <0)? b) zu spät kommt?
c) um drei Minuten zu spät kommt d) um drei Minuten zu spät kommt unter der Bedingung, dass er zu spät kommt

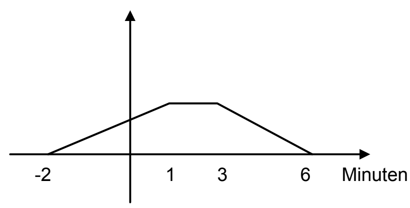


e) Berechnen sie den Erwartungswert! f) Berechnen Sie die Varianz!

6.5 Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Lehrers im Unterricht sei durch den Graphen einer Dichtefunktion gegeben:
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Lehrer
a) genau zu Beginne der Stunde kommt (x = =)
b) zu früh kommt (x <0)? b) zu spät kommt?
c) um drei Minuten zu spät kommt d) um drei Minuten zu spät kommt unter der Bedingung, dass er zu spät kommt

6.6 Bestimmen Sie für die Aufgabe 6.5: a) den Erwartungswert! b) die Varianz!
c) den Funktionsterm der Verteilungfunktion!

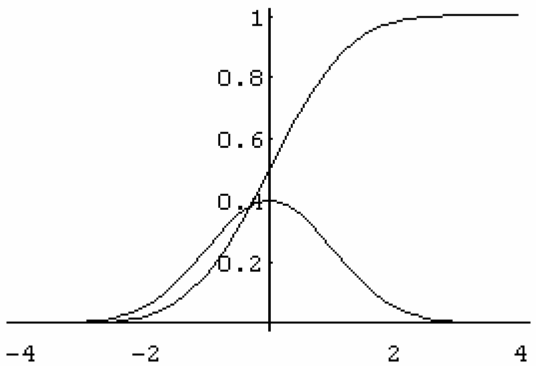
6.7 Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Lehrers im Unterricht sie durch den Graphen einer Dichtefunktion gegeben:
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Lehrer
a) genau zu Beginne der Stunde kommt (x = =)
b) zu früh kommt (x <0)? b) zu spät kommt?
c) um drei Minuten zu spät kommt d) um drei Minuten zu spät kommt unter der Bedingung, dass er zu spät kommt



6.8 Bestimmen Sie für Aufgabe 6.7: a) den Erwartungswert! b) die Varianz! c) den Funktionsterm der Verteilungfunktion!

7. Die Normalverteilung

7.1 Die N(1,0)-Verteilung



Eine Zufallsgröße z € R heißt *N(1,0)-normalverteilt,* wenn sie folgende Dichtefunktion besitzt

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$-\infty \leq z \leq +\infty$

Die Abbildung rechts zeigt die Funktion $\phi(z)$ als "glockenförmige Kurve, die symmetrisch zur Ordinate ist. Man kann beweisen, dass $\phi(z)$ eine Dichtefunktion ist, dass also gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(z) = 1$$

Auf diesen Beweis muss hier leider verzichtet werden, wir können jedoch Erwartungswert und Varianz mit unseren Kenntnissen bestimmen: Es gilt:

Erwartungswert: $\mu = 0$ **Varianz:** $\sigma = 1$

Beweis: siehe Übungsaufgabe (7.1):

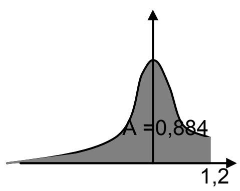
Die Verteilungsfunktion $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} = \phi(z)$ .dz kann nicht *anlytisch* berechnet werden, sondern nur *numerisch* und *näherungsweise.* Φ/z) ist ebenfalls in der Abbildung oben dargestellt!

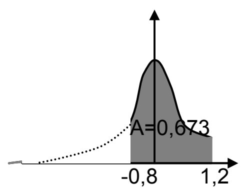
Die nebenstehende Tabelle zeigt einige Werte von $\Phi(z)$. Eine ausführliche Tabelle finden Sie in ihrer Formelsammlung.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,2	0,57925969	-0,2	0,42074031
0,4	0,6554217	-0,4	0,3445783
0,6	0,72574694	-0,6	0,27425306
0,8	0,78814467	-0,8	0,21185533
1	0,84134474	-1	0,15865526
1,2	0,88493027	-1,2	0,11506973
1,4	0,91924329	-1,4	0,08075671
1,6	0,94520071	-1,6	0,05479929
1,8	0,96406973	-1,8	0,03593027
2	0,97724994	-2	0,02275006
2,2	0,9860966	-2,2	0,0139034
2,4	0,99180247	-2,4	0,00819753
2,6	0,99533878	-2,6	0,00466122
2,8	0,99744481	-2,8	0,00255519
3	0,99865003	-3	0,00134997

Beispiel 7.1: Die Zufallsvariable z sei N(0,1)-normalverteilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
a) z < 1,2 ist! b) -0,8 < z ≤ 1,2 ist! c) z> 1,2 ist! d) Bestimmen Sie das 60-Percentil!

Lösung:
a) Φ(1,2) = 0,88,4 ⇒ p(z< 1,2) = 0,884 = 88,4%





b) p(-0,8 < z ≤ 1,2) = Φ(1,2) - Φ(-0,8) = 0,884 - 0,211 = 0,673%

c) p(z > 1,2) = 1 - p (z ≤ 1,2) = 1 - Φ (1,2) = 0,116 = 11,6%

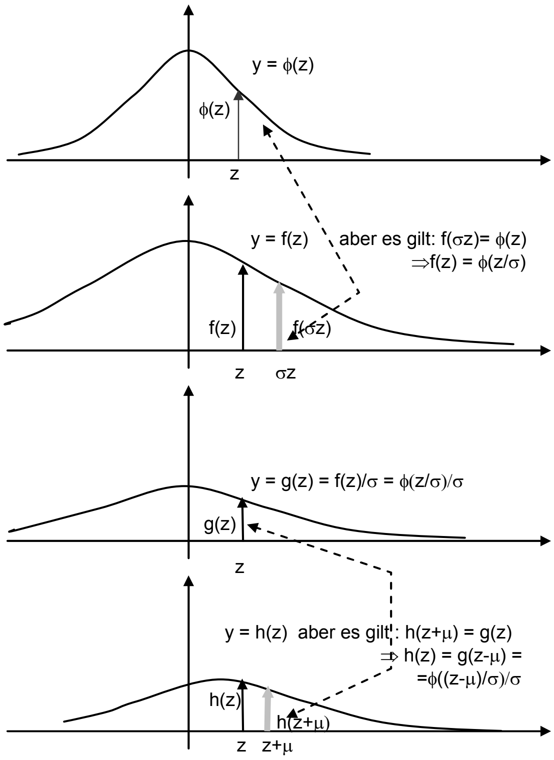
d) Φ(z) = 0,8 ⇒ z ≈ 0,3
genauer gilt: Δz/(0,4-0,2) = (0,6-0,579)/(0,576 – 0,655) ⇒ Δz = 0,2 . 0,021 / 0,079 = 0,053 z = 0,2 + 0,053 = 0,253

Beispiel 7.2
Berechnen Sie die Fläche unter der Kurve y = exp(-18x^2) zwischen x = -∞ und x = +∞ ! (exp(a) = e^a)
Lösung:

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-18x^2}dx = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-\frac{36x^2}{2}}dx = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} e^{-\frac{(6x)^2}{2}}dx \underset{(z=6x)}{=} \frac{1}{6}\int_{z=-\infty}^{z=\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}.dz = \frac{1}{6}\sqrt{2\pi}$$

Aufgaben:
(7.1) Zeigen Sie, dass für die N(0,1)-Verteilung gilt: $\mu = 0$, $\sigma=1$
(7.2) Die Zufallsvariable z sei N(0,1)-verteilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass -
a) $-1 < z \leq +1$ ist! b) $z > 2$ ist c) $z \leq -2$ und $z > 2$ ist!
(7.3) Eine Zufallsvariable x € R hat die Dichtefunktion $f(x) = C. \exp(-4x^2)$. ($-\infty \leq x \leq \infty$).
a) Bestimmen Sie C so, dass f(x) eine Dichtefunktion ist.
b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz!

7.2 Die allgemeine Normalverteilung



Die N(0,1)-Verteilung hat den Mittelwert $\mu=0$ und die Varianz $\sigma=1$. Wie muss die Dichtefunktion geändert werden, dass die Varianz gleich einer gegebenen Zahl σ wird und der Erwartungswert gleich einer ebenfalls gegebenen Zahl μ?

Dazu muss die Funktion $\phi(z)$ zunächst um den Faktor σ in horizontaler Richtung "gestreckt" werden. Dadurch entsteht eine neue Funktion f, für welche gilt:

$$f(\sigma z) = \Phi(z)$$

Damit lautet der Funktionsterm von f(z):

$$f(z) = \Phi(z/\sigma)$$

Diese Funktion ist aber um den Faktor σ „breiter“ als die „alte“ Funktion, ihre Fläche wäre zu groß. Daher muss die Funktion in vertikaler Richtung um den Faktor σ "gestaucht" werden. Wir erhalten eine weitere Funktion:

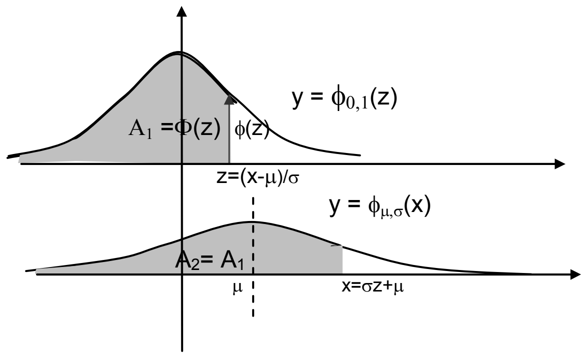
$$g(z) = .\phi(z/\sigma) / \sigma$$

Damit die Funktion den Erwartungswert μ erhält, verschieben wir sie um μ nach rechts. Es entsteht eine Neue Funktion h, für die gilt:

$h(z+\mu) = g(z) \Rightarrow h(z) = g(z-\mu) \Rightarrow h(z) = \phi\,[(z-\mu)/\sigma]/\sigma$

Bei dieser Art der Normalverteilung wird die Zufallsvariable meist nicht z sondern x genannt. Wir haben daher folgendes Ergebnis:

$$\varphi_{0,1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\sigma,\mu}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} .e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Die Fäche A_1 unter der Kurve $\phi_{0,1}(z)$ von – ∞ bis z ist gleich groß wie die Fläche A_2 unter der Kurve $\phi_{\mu,\sigma}(x)$ von -∞ bis x

Diese Verteilung nennt man N(μ,σ) Verteilung
(allgemeine Normalverteilung)

Beispiel 7.3
Eine Zufallsvariable x sei N(7,2)-verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
a) $x \leq 8{,}2$ ist, b) $x > 5$ ist?

Lösung:
a) Wir setzen: $z = (x-\mu)/\sigma = (8{,}2 – 7) /2 = 0{,}6$ und finden in der Tabelle für die Fläche $\Phi(z)$ = Fläche von $-\infty$ bis z:
$\Phi(0{,}6) \approx 0{,}73$ (73%)
b) $z = (5 – 7) / 2 = -1$; $\Phi(-1) \approx 0{,}16$ (16%)

Zufallsgrößen x, die von sehr vielen unabhängigen Faktoren abhängen, sind ungefähr N(μ,σ)–verteilt

- Menschliche Leistungen wie Prüfungsnoten, Genauigkeit beim Schiessen, Anzahl der Fehler beim Rechtschreiben.
- Längen oder Volumina von Produktionsteilen,
- Messfehler

Beispiel 7.4
Die Länge x von Metallschrauben sei normalverteilt mit $\mu = 60$ mm und σ= 0,5 mm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Schraubenlänge um mindestens 1mm vom Erwartungswert abweicht:

Lösung: Eine Abweichung von *mindestens* 1mm bedeutet entweder $x \leq 59$mm (Ereignis A) oder $x > 61$ mm (Ereignis B) $\Rightarrow$

$z \leq (59 - 60) / 0{,}5 = -2$ oder $z > (61 - 60) / 0{,}5 = + 2$

$p(A) = p(x \leq 59) = p (z \leq -2) = \Phi(-2) = 0{,}023$ $p(B) = p(x > 61) = p (z > 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,} 977 = 0{,}023$

A und B sind disjunkt: p[A oder B) = p(A) + p (B) = 0,046 (4,6%)

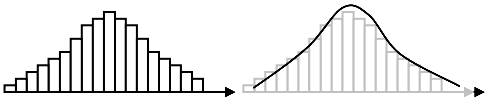
Beispiel 7.5
Das Volumen von Zahncreme in Tuben sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 40 cm^3$. 10% der Tuben weichen von diesem Volumen um mehr als $1cm^3$ ab. Bestimmen Sie σ!

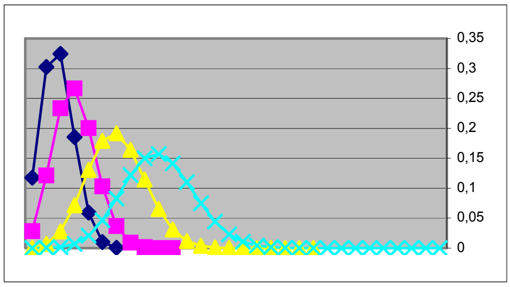
Lösung:
Für 10% der Volumina gilt: $x \leq 39$ oder $x > 41$ $\Leftrightarrow$ Für 5% der Tuben gilt
$x \leq 39$
$z \leq (39-40) / \sigma$
$\Phi(z) = 0{,}05 \Leftrightarrow z = -1 / \sigma \approx -1{,}65 \quad \sigma = 0{,}6$ [cm^3]

Aufgaben:
(7.10) Angenommen, die Ergebnisse (Punktezahl) bei einem Bonustests seien *normalverteilt* mit dem Erwartungswert 50 [Punkte] und der Varianz 10 Punkte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
a) bei diesem Test mehr als 90 Punkte zu erreichen? b) zwischen 40 und 60 Punkten zu erreichen?
(7.11) Die Ergebnisse einer Prüfung, bei welcher maximal 40 Punkte erreicht werden können, seien *annähernd* N(20,σ)-normalverteilt. Langfristige Beobaxchtungen zeigen, dass bei diesen Testes ungefähr 40% aller Studenten zwischen 15 und 25 Punkte erreichen. Bestimmen sie σ!
(7.12) Eine Firma produziert Schrauben mit der geplanten Länge μ = 20mm. Auf Grund von Unregelmäßigkeiten im Produktionsvorgang weichen die meisten Schrauben von dieser Länge ein wenig ab, die Länge x ist aber N(20, 0,5)-verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schraube
a) länger als 21mm ist? b) kürzer als 15 mm ist. c) Zwischen 19,5mm und 20,5mm lang ist?
d) Für Schrauben mit $19{,}8 < x \leq 20{,}2$ werden am Markt 0,20€ bezahlt, für Schrauben mit $20{,}2 < x \leq 20{,}6$ werden 0,10€ bezahlt, alle anderen Schrauben können nicht verkauft werden. Welchen ***mittleren*** Preis kann sich die Firma pro Schraube *erwarten?*
7.13) Präzisionsschlüssel werden akzeptiert, wenn sie mindestens 0,98cm lang sind und nicht länger als 1,02cm. In den letzten Jahren wurden durchschnittlich 3% ausgeschieden, weil sie zu kurz waren und 2%, weil sie zu lang waren. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz für die Länge der Schlüssel unter der Annahme, dass diese *normalverteilt* ist!
7.14) Die Masse bestimmter Hühnereier sei normalverteilt mit dem Mittelwert 65g bei einer Standard-Abweichung von 15g. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse der Eier um mindestens 10g vom Durchschnitt abweicht?
7.15) Angenommen, der Intelligenzquotient einer bestimmten Personengruppe sei normalverteilt mit dem Mittelwert 100 und der Standardabweichung 15.
7.16) Bestimmen Sie
a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person dieser Gruppe einen Intelligenzquotienten zwischen 88 und 118 hat! [0,637]
b) Den Prozentsatz der Personen, deren Intelligenzquotient höher als 130 ist. [0.0228]
7.17) Der Anteil eines Wirkstoffes in bestimmten Pillen ist normalverteilt mit dem Mittelwert 57,2g. Langjährige Untersuchungen zeigen, dass 13% aller Pillen mehr als 57,4g enthalten.
a) Bestimmen Sie die Standardabweichung! [0.87] b) Welche Masse überschreiten 20% der Pillen? [57.35]
7.18) Angenommen, die Größe von Neugeborenen sei normalverteilt mit der Standardabweichung 5cm.
60% aller Babies sind langer als 70cm und 40% sind kürzer als 55cm. Bestimmen Sie den Mittelwert!

7.3 *Die N(1,0)-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung*

Ein Vergleich der Binomialverteilung mit der Normalverteilung zeigt, dass die Binomialverteilung umso symmetrischer und ähnlicher der Normalverteilung wird, je größer n ist. (n ist die Anzahl der Bernoulli-Experimente bei der Binomialverteilung) die Abbildung zeigt Binomialverteilungen für n = 6 (schwarze Kurve), 10 (grau) 20 (weiß) und 30 Versuche bei einer Erfolgswahrscheinlichkeit p = 0,3 (q = 0,7)

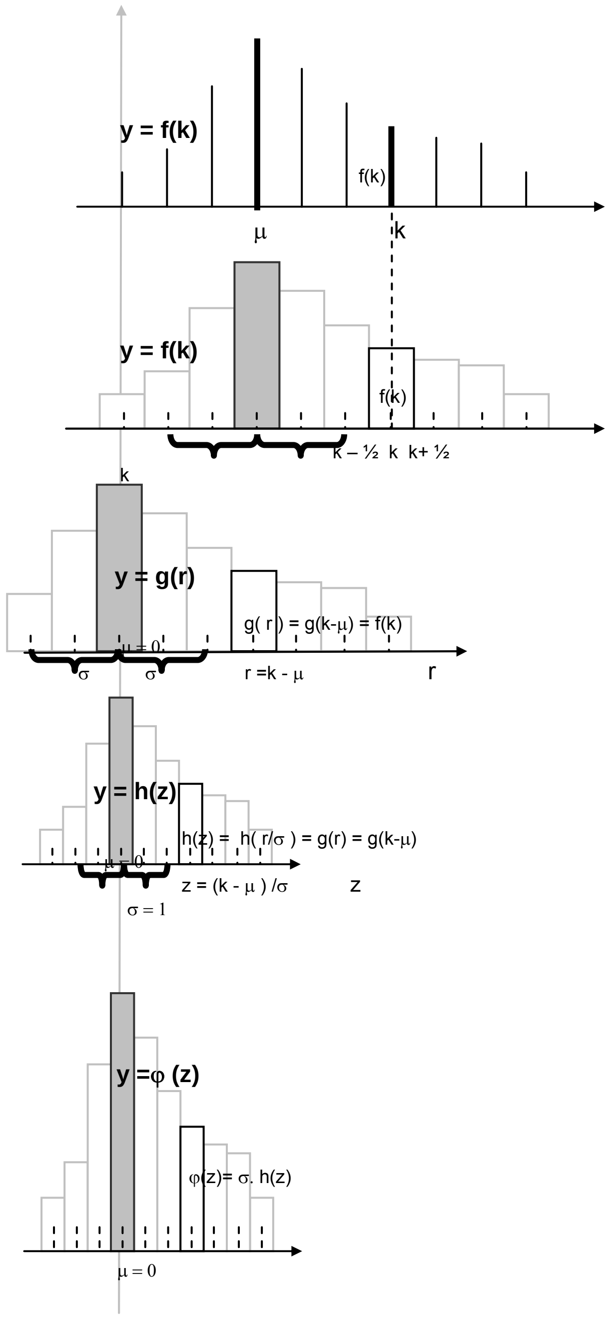




Es gilt folgender Satz:

Wenn die Zufallsvariable k binomialverteilt mit sehr großem n ist, dann ist auch die Variable z = (k - μ) / σ normalverteilt und zwar N(1,0) verteilt

$$p_n(k) = \varphi_{1,0}((k-\mu)/\sigma)$$



Begründung:
Die Binomialverteilung ist eine diskrete Verteilung. Man kann sie aber als Dichtefunktion auffassen, wenn man sie für jedes k (k = 0, 1,2 .....n) wie folgt definiert:

$$f(x) = p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{für} \quad k - ½ < x \leq k + ½$$

Auf diese Weise entsteht eine „Treppenfunktion“. Die Fläche eines Rechtecks mit der Basis k – ½ , k + ½ ist gleich der Wahrscheinlichkeit $p_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Die Summe aller Rechtecksflächen muss gleich 1 sein. Die Basis jeder Rechtecksfläche ist ebenfalls Δk = 1 und wir können f(x) wirklich als *Dichtefunktion* anwenden:

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable x zwischen k – ½ und k + ½ liegt ist $f(k).\Delta k = p_n(k).1$

Um eine Dichtefunktion zu finden, die mit der N(0,1) Verteilung vergleichbar ist, verschieben wir unsere Funktion um μ nach links, damit der ***neue Erwartungswert gleich Null*** wird. Wir definieren also eine neue Zufallsvariable r = x - μ und sagen:
Die Wahrscheinlichkeit, dass r zwischen k –μ – ½ und k - μ + ½ liegt, heißt g(r) und ist:

$$g(r).\Delta r = g(r) = p_n(k)$$

Je größer n ist, desto mehr Rechtecke gibt es. Sie werden aber immer niedriger, bis schließlich ihre Höhe bei n → ∞ fast gegen Null geht. Die Gesamtfläche bleibt aber gleich 1. Allerdings gilt immer noch

$$\boldsymbol{\sigma = \sqrt{npq} \rightarrow \infty}$$

Wir *stauchen* daher zunächst unsere Dichtefunktion g(r) so lange in horizontaler Richtung, ***bis sie die Varianz 1 bekommt***; das ist eine *Stauchung* um den Faktor $\sigma = \sqrt{npq}$. Wir führen also neuerlich eine Variable $z = r/\sqrt{npq}$ ein und bemerken, dass nun gilt

$$\Delta z = 1 / \sqrt{npq}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable zwischen z - Δz/2 und z + Δz/2 liegt muss immer noch gleich $p_n(k)$ sein. Daher gilt für die neue Dichtefunktion φ(z):

$\varphi(z).\Delta z = p_n(k) \;\Rightarrow\; \varphi(z) = p_n(k) \,.\, 1/\Delta z \;\Rightarrow$

$$\varphi(z) = p_n(k).\sqrt{npq}$$

Man erkennt aus dieser Gleichung, dass unsere neue Dichtefunktion $\varphi(z)$ aus g(r) nicht nur durch bloße Stauchung um den Faktor $\sqrt{npq}$ in horizontaler Richtung entsteht (h(z)), sondern zusätzlich durch eine *Streckung* um denselben Faktor in *vertikaler* Richtung. Dies ist auch notwendig, damit die Fäche unter der Dchtefunktion gleich 1 bleibt.
Da wir später den Term $\Delta\varphi(z) / \varphi(z)$ benötigen, berechnen wir ihn zunächst einmal:

$$\frac{\Delta\varphi(z)}{\varphi(z)} = \frac{\varphi(z+\Delta z)-\varphi(z)}{\varphi(z)} = \frac{p_n(k+1)-p_n\ (k)}{p_n(k)} = \frac{\dfrac{n!.p^{k+1}q^{n-k-1}}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\dfrac{n!.p^k q^{n-k}}{k!.(n-k)!}} - 1 = \frac{n-k}{k+1}.\frac{p}{q} - 1 =$$

$$\frac{np-kp-kq-q}{kq+q} = \frac{np-k-q}{kq+q}$$

Nun dividieren wir noch beide Seiten durch $\Delta z = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$ und lassen danach $n \to \infty$ gehen

$$\frac{1}{\varphi(z)}.\frac{\Delta\varphi(z)}{\Delta z} = \sqrt{npq}.\frac{np-k-q}{kq+q} \quad \textit{wenn } n \to \infty \textit{ geht, so geht } \Delta z \to 0 \ \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{\varphi(z)}.\varphi'(z) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{npq}.\frac{np-k-q}{kq+q} = (\ \textit{wegen}\ k = z\sqrt{npq}+\mu\ ) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{npq}\ \frac{\cancel{np} - z\sqrt{npq} - \cancel{\mu} - q}{z\sqrt{npq^3} + \mu q + q} =$$

$$= (\textit{wegen}\ \mu\ = np\ ) = \lim_{n\to\infty} \frac{-znpq - \sqrt{npq}^3}{z\sqrt{npq}^3 + npq + q} = -z$$

Ergebnis:

$\varphi'(z) / \varphi(z) = -z \quad \Leftrightarrow \quad [\ \ln\varphi(z)\ ]' = -z \quad \Leftrightarrow \quad \ln\varphi(z) = -z^2/ 2 + C \quad \Leftrightarrow$

$\varphi(z) = \exp[-z^2 / 2 + C) = \exp[-z^2/2] . e^C$ = (wegen e^C = const) = const. $\exp[-z^2/2]$

Zur Bestimmung der Konstanten verwendet man die Eigenschaft, dass die gesamte Fläche unter der Dichtefunktion gleich 1 ist.

$$Konst.\int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \varphi(z)dz = Konst.\int_{z=-\infty}^{z=+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = Konst.\sqrt{2\pi} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad Konst = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Die gesuchte Dichtefunktion ist :

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$\varphi(z)$ ist aber die Dichtefunktion der N(0,1)-Verteilung.

Beispiel:

40% aller Universitätsstudenten eines Landes sind männlich. Wir nehmen an, die Studenten seien zufällig über alle Universitäten und Institute des Landes verteilt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem bestimmten Institut mit 100 Studenten a) genau 50, b) mindestens 50 Studenten männlich sind?

Lösung
Eigentlich haben wir ein Problem der Binomialverteilung mit
p(ein zufällig ausgewählter Student ist ein Mann) = p = 0,4, q = 0,6 und n = 100 Versuchen.

Wir bekämen in diesem Fall:

a) p(genau 50 Männer) = $\binom{100}{50}.0{,}4^{50}.0{,}6^{50}$

Die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit ist äußerst mühevoll, wir berechnen sie daher näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung:

$\mu = np = 40 \qquad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100\ .0{,}4\ .0{,}6} = 4{,}9 \qquad$ x = Anzahl der männlichen Studenten

$p(x=50) = p(49.5 \le x \le 50{,}5) = \Phi((50.5 - 40)/4{,}9) - \Phi((49.5 - 40)/4{,}9) =$

$= \Phi(2{,}14) - \Phi(1{,}94) \approx 0{,}983 - 0{,}974 = 0{,}009$

b) $P(\text{mindestens 50 Männer}) = p(\text{50 Männer}) + p(\text{51 Männer}) + \ldots\ldots + p(\text{100 Männer}) =$
$= + \binom{100}{51} . 0{,}4^{51} . 0{,}6^{49} + \ldots\ldots + \binom{100}{100} . 0{,}4^{100}$

Hier erspart die Anwendung der Normalverteilung noch mehr Mühe:

$p(x \ge 50) = 1 - p(x \le 49) = \Phi((49.5 - 40)/4{,}9) = \Phi(1{,}94) = 0{,}974$

Aufgaben:

7.20) Eine Münze wird 1000 Mal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit
a) für mindestens 600 Köpfe! B) dass mindestens 450 Köpfe und höchstens 550 Köpfe auftreten!
7.21) Ein Würfel wird 400 Mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
a) Mindestens 250 Mal die sechs kommt! b) höchstens 100 mal die Eins kommt!
7.22) Es ist bekannt, dass 70% der TV-Konsumenten ein bestimmtes Programm sehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stadt von 10 000 Einwohnern
a) mehr als die Hälfte dieses Programm sehen? b) weniger als ein Viertel dieses Programm sehen?

8. Die Poisson-Verteilung

8.1 Grenzwert der Binomialverteilung

Es gibt einen zweiten interessanten Grenzwert der Binomialverteilung und zwar für den Fall dass zugleich

$$n \to \infty, \quad p \to 0 \quad \text{und} \quad n.p \to \mu \text{ gehen}$$

Wir erhalten dann:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n.(n-1)..........(n-k+1)}{k!}p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n.(n-1)..........(n-k+1)}{n..n.........................n.k!}(p.n)^k\frac{(1-p)^n}{(1-p)^k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n.(n-1)..........(n-k+1)}{n..n.........................n.k!}\mu^k\frac{(1-\frac{\mu}{n})^n}{(1-\frac{\mu}{n})^k} = \mu^k.\frac{e^{-\mu}}{k!}$$

Ergebnis: $$P\ (k) = \mu^k.\frac{e^{-\mu}}{k!}$$

Erwartungswert

Wie bei der Binomialverteilung ist. $\mu = \lim_{n\to\infty} np$

Varianz

Wie bei der Binomialverteilung ist $\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{npq} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{np(1-p)} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{np(1-\mu/n)} = \sqrt{\mu}$

8.2 Anwendung

Die *Mittlere Häufigkeit* (≈ Erwartungswert μ der Häufigkeit) eines *seltenen* Ereignisses in einem größeren Zeitintervall ist bekannt: Die Wahrscheinlichkeit für eine *gegebene Häufigkeit* dieses Ereignis im Zeitintervall ist gesucht.

Beispiel 8.1
Pro Stunde treffen in einer Firma im langjährigen Durchschnitt 20 Telephonanrufe ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der nächsten Stunde a) kein Anruf, b) 5 Anrufe, c)6 Anrufe eintreffen?

Lösung:
Der Erwartungswert der Zufallsvariablen $\mu \approx 20$ [Anrufe / h]

a) Gegebene Häufigkeit : $k = 0 \Rightarrow P(k=0) = 20^0.e^{-20} / 0! = e^{-20} = 2{,}06.10^{-9} = 0{,}000\,000\,00206 \to 0$

b) $k = 5 \Rightarrow P(k=5) = 20^5.e^{-20} / 5! \approx 5{,}5 \,.\, 10^{-5} = 0{,}000\,055$ (0,0055%)

c) $k = 6 \Rightarrow P(k=10) = 20^6.e^{-20} / 6! = 0{,}00018$ (0,18%)

Beispiel 8.2
Auf einer bestimmten Straßenkreuzung ereignen sich pro Jahr durchscnittlich 5 Unfälle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem bestimmten Jahr a) keine, b) zehn Unfälle ereignen?
Lösung:
Erwartungswert $\mu = 5$ [Unfälle / Jahr]
a) $k = 0 \Rightarrow P(0) = 5^0.e^{-5} / 0! = e^{-5} = 0{,}0067$ (0,67%)
b) $k = 10 \Rightarrow P(10) = 5^{10}.e^{-5} / 10! = 0{,}18$ (1,8%)

*Statt eines **Zeit**intervalls für die Ereignisse können auch Intervalle anderer Größen, beispielsweise Längenintervalle, Intervalle für Massen usw - betrachtet werden.*

Beispiel 8.3
Von 10 000 Stück Kiwi sind im langjährigen Durchschnitt 8 Stück verdorben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Kauf von 10 Stück a) kein Stück verdorben ist b) höchstens ein Stück ist? c) genau 3 Stück verdorben sind?
Lösung:
Die Wahrscheinlichkeit, eine verdorbene Frucht zu erhalten beträgt $p \approx 8 / 10\,000 = 0{,}0008 \to 0$. Bei dieser kleinen Wahrscheinlichkeit benutzen wir näherungsweise die Poisson-Verteilung. Der *Erwartungswert* bei $n = 10$ Experimenten ist daher $\mu = np = 0{,}008$

a) $p_{10}(0)= 0{,}008^0 e^{-0{,}008} / 0! = e^{-0{,}008} \approx 0{,}999$
b) $p = p_{10}(0) + p_{10}(1) = 0{,}9992 + 0{,}00077 = 0{,}99997$
c) $p_{10}(3) = 0{,}008^3 . e^{-0{,}008} / 3! \approx 0{,}000\,000\,08$

Beispiel 8.4
Eine Firma produziert Magnetbänder. Bisher traten einergermaßen regelmäßig ca 30 Fehlstellen pro 100km Magnetband auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich auf den nächsten 10 Metern des Bandesmindestens ein Fehler befindet?
$p = 30 / 100\,000 = 0{,}000\,3$ Erwartungswert für 10 m: $\mu = n.p = 10 . 0{,}000\,3 = 0{,}003$

$p_{10}(k \geq 1) = 1 - p_{10}(0) = 1 - 0{,}003^0 . e^{-0{,}003} / 0! = 1 - 0{,}997 = 0{,}003$ (0,3 %)

Aufgaben:
8.1) Eine bestimmte Firma produziert pro Jahr ungefähr 30 000 km Elektrokabel. Dabei werden von den Kunden im Schnitt 150 Fehler (Bruchstellen) gemeldet.
Jemand kauft 40 m dieses Kabels. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich darauf
a) keine Bruchstelle [0,9998] b) mindestens eine Bruchstelle [0,0002]
c) höchstens eine Bruchstelle befindet [0,999998]
8.2) Von einer Million Schweinen bekommen circa sechs Tiere eine seltenen Krankheit, deren Entstehung ungeklärt ist und rein zufällig erscheint. Auf einem Bauernhof befinden sich zur Zeit 200 Schweine. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass
a) kein Tier erkrankt ist! [0,9988007] b) mindestens ein Tier erkrankt ist! [0,0011993]
c) genau zwei Tiere erkrankt sind!
8.3) Die Wiener U-Bahnlinien verfügen für ihre 250 Waggons über 10 Kontrollorgane, die sich beliebig und nahezu zufällig über die Wagons verteilen. Jemand steigt zur Hauptverkehrszeit, wenn alle Waggons unterwegs sind in einen U-Bahn-Zug mit sechs Waggons. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich im Zug
a) kein Kontrollor b) genau ein Kontrollor c) mindestens ein Kontrollor befindet!
8.4) Von 120 000 in Österreich tätigen Lehrern sind täglich ungefähr 3000 Lehrer krank. Die Verteilung der Kranken auf die Österreichischen Schulen erscheint im Normalfall gleichmäßig und zufällig zu sein.
Ein Schule hat 50 Lehrer. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass heute
a) alle Lehrer gesund sind b) mindestens ein Lehrer krank ist b) alle Lehrer krank sind!

8.5a) Normalverteilung und Poissonverteilung sind Grenzfälle derselben Verteilung.
a) Um welche Verteilung handelt es sich? b) Welche Größe geht dabei gegen ∞ ?
c) Bei welcher Verteilung geht zusätzlich noch eine Größe gegen Null? Welche Größe?
d) Was können Sie über Erwartungswert und Varianz der beiden Verteilungen sagen?