Vorlesung „Ausgewählte Kapitel der Geometrie“

– Leitfaden –

1 Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen bilden die Grundlage für die Geometrie, so dass wir hier noch einmal kurz ihre Entstehungsweise und die wichtigsten Eigenschaften zusammenfassen.

- die *natürlichen Zahlen*:
$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$
- Nehmen wir die Null hinzu, so erhalten wir
$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$
- Nehmen wir die negativen Zahlen hinzu, so erhalten wir die *ganzen Zahlen*:
$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$
- Nehmen wir Brüche hinzu, so erhalten wir die *rationalen Zahlen*:
$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}.$$
- „Vervollständigen“ wir die rationalen Zahlen (s.u.), so erhalten wir die *reellen Zahlen*:
$$\mathbb{R}$$

Informell stellt man sich die reellen Zahlen als Zahl mit möglicherweise unendlich vielen Nachkommastellen vor.

Satz 1.1. *Die reellen Zahlen bilden zusammen mit der gewöhnlichen Addition* $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a + b$ *und der gewöhnlichen Multiplikation* $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ *sowie der* 0 *als additiv neutralem Element und der* 1 *als multiplikativ neutralem Element einen Körper.*

Bemerkung 1.2.
- *Es gibt eine geometrische Anschauung für die reellen Zahlen: Die reellen Zahlen entsprechen Punkten auf einer Zahlengeraden. Das Element* $0 \in R$ *entspricht einem ausgezeichneten Punkt auf der Geraden und trennt die Seite mit den negativen Zahlen von der Seite mit den positiven Zahlen. Jeder Punkt auf der Geraden entspricht damit einer Zahl, die den gerichteten Abstand zum Nullpunkt angibt.*

- *Die algebraischen Operationen Addition und Multiplikation haben eine geometrische Bedeutung:*
  - *Die Addition einer Zahl r entspricht dem Verschieben um den gerichteten Abstand r.*
  - *Die Multiplikation mit einer Zahl r entspricht (in Abhängigkeit vom r) einer Stauchung oder Streckung oder einer Spiegelung am Nullpunkt oder einer Kombination davon.*

Die geometrische Anschauung finden wir in den folgenden Axiomen der reellen Zahlen wieder:

Anordnungsaxiome

- Für jedes Element $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der folgenden Bedingungen: $x < 0$, $x = 0$ oder $x > 0$.
- Sind $x > 0$ und $y > 0$, so ist auch $x + y > 0$.
- Sind $x > 0$ und $y > 0$, so ist auch $x \cdot y > 0$.

Definition 1.3. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $x < y$, falls $y - x > 0$ ist, und $x \leq y$, falls $y - x > 0$ oder $y - x = 0$ ist.

Ein weiteres Axiom, das wir brauchen werden, ist das folgende:

Archimedisches Axiom

Für jede reelle Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n mit $x < n$.

Daraus folgt:

Folgerung 1.4. *Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Beweis. Übungsaufgabe. □

Im Verlauf der Übungsaufgabe ist insbesondere zu zeigen:

Lemma 1.5.

- *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $x > 0$ genau dann, wenn $\frac{1}{x} > 0$ ist.*
- *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $y > 0$. Dann ist $x < y$ genau dann, wenn $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ ist.*

Definition 1.6. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann definieren wir:

- das *abgeschlossene Intervall* $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- das *offene Intervall* $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

- $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Darüber hinaus lassen wir als Grenzen auch $-\infty$ und ∞ zu und definieren:

- $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
- $]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
- $]-\infty, \infty[:= \mathbb{R}$

Zwei wichtige Eigenschaften der reellen Zahlen werden wir im Folgenden benötigen:

Satz 1.7 (Vollständigkeit der reellen Zahlen)**.** *Ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, ... gegeben mit*

$$[a_1, b_1] \supsetneqq [a_2, b_2] \supsetneqq [a_3, b_3] \supsetneqq \dots,$$

so gibt es eine reelle Zahl x mit $x \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1.8.
- *Gegeben sei die Folge der Intervalle $[a_n, b_n] := \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $0 \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $0 \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right]$.*
- *Wichtig ist jedoch, dass die Intervalle abgeschlossen sein müssen. Nimmt man nämlich beispielsweise die Folge der offenen Intervalle $\left]0, \frac{1}{n}\right[$, so ist $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \left]0, \frac{1}{n}\right[= \emptyset$.*

Beweis. [1]

Da alle Elemente in den Intervallen $\left]0, \frac{1}{n}\right[$ positiv sind, kann ein Element x, das in allen Intervallen liegt, auch nur positiv sein.

Angenommen, wir hätten so ein $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]0, \frac{1}{n}\right[$. Dann wäre auch $\frac{1}{x} > 0$ (nach Lemma 1.5) und $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, und daher gäbe es nach der Folgerung zum Archimedischen Axiom ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{x} < m$ ist. Dann wäre aber (wiederum nach Lemma 1.5) $\frac{1}{m} < x$, und somit $x \notin \left]0, \frac{1}{m}\right[$. **Widerspruch!** □

Satz 1.9 (Bolzano-Weierstraß)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Ist $x_1, x_2, x_3, \dots$ eine Folge reeller Zahlen mit $x_n \in [a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gibt es eine Teilfolge $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots$ (also Indizes $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$) und eine Zahl $x \in [a, b]$, so dass der Abstand der Folgenglieder x_{i_n} zu dem x „beliebig klein“ wird.*[2]

[1] Sofort sehen wir, dass $0 \notin \left]0, \frac{1}{n}\right[$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Unser Kandidat von oben (wie bei den abgeschlossenen Intervallen) kommt also schon mal nicht infrage.)

[2] Für diejenigen, die Analysis gehört haben: „Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat einen Häufungspunkt.“ Oder auch: „Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.“

Beispiel 1.10. *Wir betrachten die Folge x_n, $n \in \mathbb{N}$, die durch*

$$x_n := \begin{cases} 7, & \textit{falls } n \textit{ ungerade} \\ \frac{1}{n}, & \textit{falls } n \textit{ gerade} \end{cases}$$

gegeben ist.

Beispielsweise können wir die Teilfolge betrachten, die aus den Folgengliedern mit ungeraden Indizes besteht, also $x_1 = 7$, $x_3 = 7$, $x_5 = 7$, ... In diesem Fall könnten wir $x := 7$ wählen, und der Abstand der Teilfolgenglieder zu $x = 7$ ist immer 0.

Oder die Teilfolge, die aus den Folgengliedern mit geraden Indizes besteht, also $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{4}$, $x_6 = \frac{1}{6}$, ... In diesem Fall könnten wir $x := 0$ wählen, und der Abstand der Teilfolgenglieder zu $x = 0$ würde beliebig klein (weil die Teilfolge nach unten durch 0 beschränkt ist und es nach der Folgerung aus dem Archimedischen Axiom zu jedem vorgegebenen Abstand $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ist).

Oder eine andere „schöne“ Teilfolge...

2 Die Euklidische Ebene: Punkte, Geraden und Abstände

Die zugrundeliegende Menge für die Euklidische Ebene bezeichnen wir mit $\mathcal{E}$. Elemente aus $\mathcal{E}$ nennen wir *Punkte*. Weiterhin sei eine Familie $\mathcal{L}$ von Teilmengen von $\mathcal{E}$ gegeben, deren Elemente wir *Geraden* nennen.

Wir fordern nun, dass dieses System folgende Eigenschaften hat:

Inzidenzaxiome

- Es gibt in $\mathcal{E}$ drei Punkte, die nicht alle auf ein- und derselben Geraden liegen.
- Sind $P, Q \in \mathcal{E}$ verschieden, so gibt es genau eine Gerade $L \in \mathcal{L}$ mit $P, Q \in L$. Diese eindeutig bestimmte Gerade bezeichnen wir mit $\overleftrightarrow{PQ}$.

Wir „kennen“ ein Beispiel für eine Euklidische Ebene:

Beispiel 2.1.

$$\mathcal{E} := \mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{L} := \{L_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 \neq 0\},$$

wobei $L_{a,b,c} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$.

Bemerkung 2.2.
- *Es kann vorkommen, dass unterschiedliche Parameter a, b, c dieselbe Gerade beschreiben. Beispielsweise ist $L_{1,1,0} = L_{2,2,0}$.*

- *Durch die Gleichung $ax + by + c = 0$ wird wirklich eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ beschrieben:*

  Falls $b \neq 0$ ist, so können wir nach y auflösen und erhalten:

  $$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

  also eine typische Geradengleichung. (Zwei Geraden $L_{a,b,c}$ und $L_{a',b',c'}$ mit $b \neq 0$ und $b' \neq 0$ stimmen also genau dann überein, wenn $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\frac{c}{b} = \frac{c'}{b}$ ist.[3])

  Falls $b = 0$ ist (in diesem Fall muss $a \neq 0$ sein), so ist y beliebig, aber

  $$x = -\frac{c}{a}.$$

  Hier wird also die Gerade beschrieben, die parallel zur y-Achse verläuft und Abstand $-\frac{c}{a}$ davon hat. (In diesem Fall stimmen zwei Geraden $L_{a,0,c}$ und $L_{a',0,c'}$ genau dann überein, wenn $\frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}$ ist.)

  Ist $b = 0$ und $b' \neq 0$, so können die beiden Geraden $L_{a,b,c}$ und $L_{a',b',c'}$ nicht gleich sein, denn im ersten Fall ist der x-Wert fest und der y-Wert beliebig, und im zweiten Fall ist der x-Wert variabel, und wir können zu jedem x-Wert einen y-Wert bestimmen.

Satz 2.3. *Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{L}$ wie im Beispiel 2.1, so sind die beiden Inzidenzaxiome erfüllt.*

Beweis. 1. Inzidenzaxiom: Wir betrachten die Punkte $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Diese liegen nicht auf einer Geraden.
Angenommen, es gibt $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, so dass $(0,0), (1,0), (0,1) \in L_{a,b,c}$ gilt. Dann gilt:

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0,$$

$$a \cdot 1 + b \cdot 0 + c = 0$$

und

$$a \cdot 0 + b \cdot 1 + c = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $c = 0$ sein muss, aus der zweiten Gleichung dann, dass $a = 0$ sein muss, und aus der dritten Gleichung, dass $b = 0$ sein muss. Damit wäre aber $a^2 + b^2 = 0^2 + 0^2 = 0$. **Widerspruch!**

2. Inzidenzaxiom:
Wir müssen zeigen, dass es zu zwei verschiedenen Punkten $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ genau eine Gerade $L_{a,b,c}$ gibt, die die beiden Punkte enthält.

Zunächst zeigen wir, dass es *mindestens* eine solche Gerade $L_{a,b,c}$ gibt:

Wir setzen $a := -(y_2 - y_1)$, $b := x_2 - x_1$ und $c := -(x_2 y_1 - x_1 y_2)$. (Insbesondere ist damit immer $a^2 + b^2 \neq 0$, denn es ist nicht gleichzeitig $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$. Sonst wären ja die beiden Punkte P und Q gleich.)

[3] Einsetzen von 0 und 1 in die Gleichung liefert, dass die beiden Verhältnisse $\frac{c}{b}$ und $\frac{a}{b}$ eindeutig bestimmt sind.

Es gilt:

$$\begin{aligned} a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c &= -(y_2-y_1)\cdot x_1 + (x_2-x_1)\cdot y_1 - (x_2y_1 - x_1y_2) \\ &= -y_2x_1 + y_1x_1 + x_2y_1 - x_1y_1 - x_2y_1 + x_1y_2 = 0. \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned} a\cdot x_2 + b\cdot y_2 + c &= -(y_2-y_1)\cdot x_2 + (x_2-x_1)\cdot y_2 - (x_2y_1 - x_1y_2) \\ &= -y_2x_2 + y_1x_2 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_2 = 0. \end{aligned}$$

Damit liegen die beiden Punkte P und Q auf der Geraden, die durch (a,b,c) bestimmt ist.

Nun zeigen wir, dass es *höchstens* eine Gerade gibt, die P und Q enthält:

Angenommen, wir haben irgendwelche $a,b,c\in\mathbb{R}$, so dass $P\in L_{a,b,c}$ und $Q\in L_{a,b,c}$.
Dann gilt:

$$a\cdot x_1 + b\cdot y_1 + c = 0$$

und

$$a\cdot x_2 + b\cdot y_2 + c = 0.$$

Daraus folgt insbesondere:

$$ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2,$$

und damit:

$$a(x_1-x_2) = b(y_2-y_1).$$

Fall 1: $x_1 = x_2$.
Dann ist $0 = b(y_2 - y_2)$. Da aber hier, weil $x_1 = x_2$ ist, $y_1 \neq y_2$ sein muss, folgt: $b = 0$. Dann ist a beliebig, aber $a\neq 0$, und c lässt sich daraus berechnen als $c = -a\cdot x_1$. Das Verhältnis $\frac{c}{a} = -x_1$ ist also eindeutig bestimmt und damit auch die Gerade.

Fall 2: $x_1 \neq x_2$.
Dann ist b beliebig und

$$a = b\cdot\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}.$$

Insbesondere muss $b\neq 0$ sein, da sonst gleichzeitig $a = 0$ wäre.
Wir erhalten, dass

$$\frac{a}{b} = \frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}$$

ist.
Weiterhin können wir damit c berechnen, denn es muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 = ax_1 + by_1 + c &= b\cdot\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}\cdot x_1 + by_1 + c \\ = b\cdot\frac{y_2x_1 - y_1x_1 + x_1y_1 - x_2y_1}{x_1-x_2} + c &= b\cdot\frac{y_2x_1 - x_2y_1}{x_1-x_2} + c. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$c = -b \cdot \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{x_1 - x_2},$$

also:

$$\frac{c}{b} = \frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{x_2 - x_1}.$$

Die Verhältnisse $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$ sind also hier eindeutig bestimmt und somit auch die Gerade. $\square$

Um Abstände berechnen zu können, müssen wir zunächst die Punkte auf Geraden genauer beschreiben.
Geraden kann man sich Vorstellen als einen Zahlenstrahl von reellen Zahlen. Wir benötigen also eine Art „Identifikation“ der Punkte auf einer Geraden mit Elementen der reellen Zahlen.

Erinnerung 2.4. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ zwischen zwei Mengen M und N heißt *bijektiv*, wenn es eine Abbildung $g\colon N \to M$ gibt mit

$$(g \circ f)(m) = m \text{ für alle } m \in M$$

und

$$(f \circ g)(n) = n \text{ für alle } n \in N.$$

Die Abbildung g ist dann eindeutig bestimmt und heißt *Umkehrabbildung* zu f.

Definition 2.5. Sei wieder eine Menge $\mathcal{E}$ mit einer Familie $\mathcal{L}$ von Geraden gegeben und $L \in \mathcal{L}$. Wir nennen eine bijektive Abbildung $f\colon L \to \mathbb{R}$ ein *Koordinatensystem* für L.

Wir führen folgendes Axiom ein:

Messlattenaxiom

Jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ hat (mindestens) ein Koordinatensystem.

Wir können den Abstand zwei reeller Zahlen über die Betragsfunktion definieren:

Definition 2.6. Die *Betragsfunktion* $|-|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Der *Abstand* zweier reeller Zahlen x und y ist gegeben durch den Betrag der Differenz: $|x - y|$.

Wir setzen im Folgenden voraus, dass die Inzidenzaxiome und das Messlattenaxiom für $\mathcal{E}$ und die zugehörige Familie $\mathcal{L}$ gelten. Weiterhin wählen wir für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ ein *festes* Koordinatensystem $f_L : L \to \mathbb{R}$.

Definition 2.7. Die *Abstandsfunktion* $d\colon \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathbb{R}$ ist für zwei beliebige Punkte $P, Q \in \mathcal{E}$ definiert durch
$$d(P,Q) := |f_{\overleftrightarrow{PQ}}(P) - f_{\overleftrightarrow{PQ}}(Q)|.$$

Satz 2.8. *Die so definierte Abstandsfunktion d hat folgende Eigenschaften:*

$$d(P,Q) \geq 0 \text{ für alle } P, Q \in \mathcal{E},$$

$$d(P,Q) = 0 \text{ genau dann, wenn } P = Q,$$
$$d(P,Q) = d(Q,P) \text{ für alle } P, Q \in \mathcal{E}$$

und
$$d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q) \text{ für alle } P, Q, R \in \mathcal{E} \text{ mit } R \in L_{\overleftrightarrow{PQ}}.$$

Beweis. Das folgt aus den Eigenschaften der Betragsfunktion $|-|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und daraus, dass $f_{\overleftrightarrow{PQ}}$ bijektiv ist.[4] □

Der Zusammenhang der Abstandsfunktion d zum Abstandsbegriff, wie wir ihn im $\mathbb{R}^2$ haben, ist wie folgt:

Erinnerung 2.9. Sind $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$ in $\mathbb{R}^2$ gegeben, so ist der euklidische Abstand $d_{\mathbb{R}^2}(P,Q)$ zwischen P und Q gegeben durch

$$d_{\mathbb{R}^2}(P,Q) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Satz 2.10. *Seien $\mathcal{E} := \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{L} := \{L_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0\}$, wobei*

$$L_{a,b,c} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$$

ist.
Es gibt zu jeder Geraden $L \in \mathcal{L}$ ein Koordinatensystem $f_L\colon L \to \mathbb{R}$, so dass für den durch f_L definierten Abstand d gilt:
$$d(P,Q) = d_{\mathbb{R}^2}(P,Q).$$

Beweis. Ist $L := L_{a,b,c}$ gegeben, so definieren wir das Koordinatensystem durch

$$f_L\colon L \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y,$$

falls $b = 0$ ist, und
$$f_L\colon L \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2},$$

falls $b \neq 0$ ist.[5] □

[4] Die genauen Ausführungen dazu sind eine Übungsaufgabe.
[5] Das genaue Durchrechnen ist eine Übungsaufgabe.

3 Isometrien in der euklidischen Ebene

Wir betrachten wieder unser Modell $(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ mit $\mathcal{E} := \mathbb{R}^2$ und

$$\mathcal{L} := \{L_{a,b,c} \mid a, b, c \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 \neq 0\},$$

wobei $L_{a,b,c} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ ist.

Definition 3.1. Eine *Isometrie* in $\mathcal{E}$ ist eine Abbildung $g\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, für die gilt:

$$d(P, Q) = d(g(P), g(Q)).$$

Das heißt, die Abbildung g ist abstandserhaltend.

Bemerkung 3.2. *Da wir in Satz 2.10 gesehen haben, dass wir die Abstände auf den Geraden bei vorgegebenem Koordinatensystem durch den euklidischen Abstand berechnen können, ist es egal, ob wir hier die beiden Abstandsfunktionen betrachten, die auf den beiden Geraden* $\overleftrightarrow{PQ}$ *und* $\overleftrightarrow{g(P)g(Q)}$ *gegeben sind, oder den euklidischen Abstand.*

Um Isometrien im $\mathbb{R}^2$ beschreiben zu können, müssen wir zunächst „schöne" Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ beschreiben können.

Wir definieren zunächst die *Addition* von Punkten im $\mathbb{R}^2$:

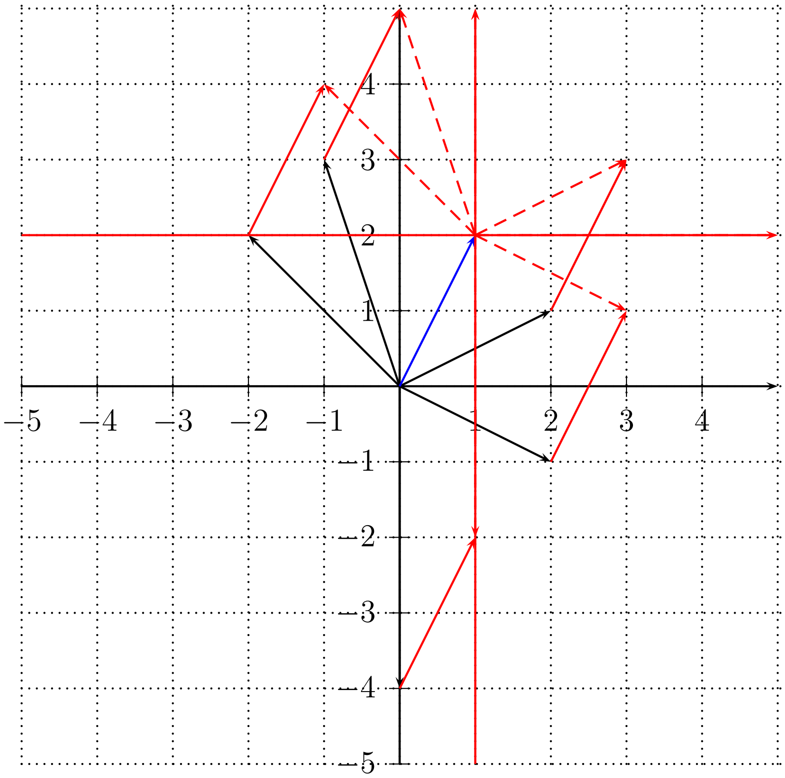
Definition 3.3. Sind zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $Q = \binom{x_2}{y_2}$, so definieren wir die *Summe der beiden Punkte* P *und* Q als den Punkt

$$P + Q := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns eine Abbildung $+\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \mapsto P + Q$.

Die Addition eines festen $Q \in \mathbb{R}^2$ zu jedem einzelnen Punkt aus $\mathbb{R}^2$ liefert eine Verschiebung der euklidischen Ebene.

Im folgenden Bild ist $Q = \binom{1}{2}$ fest vorgegeben: Das ist der Punkt, zu dem der blaue Pfeil führt. Die Addition von Q zu beliebigen Punkten aus dem $\mathbb{R}^2$ – hier wurde eine Auswahl durch schwarze Pfeile angedeutet – führt zu einer Verschiebung des $\mathbb{R}^2$ in der Richtung des blauen Pfeils. Wo die neuen, um Q verschobenen Punkte liegen, zeigen die Spitzen der jeweiligen roten Pfeile, die an die schwarzen Pfeile angehängt sind.



Zur besseren Orientierung sind in der Zeichnung auch noch die jeweiligen Lagen der Punkte im durch Q verschobenen $\mathbb{R}^2$ durch gestrichelte rote Pfeile angedeutet.

Weiterhin definieren wir eine *Skalarmultiplikation* im $\mathbb{R}^2$:

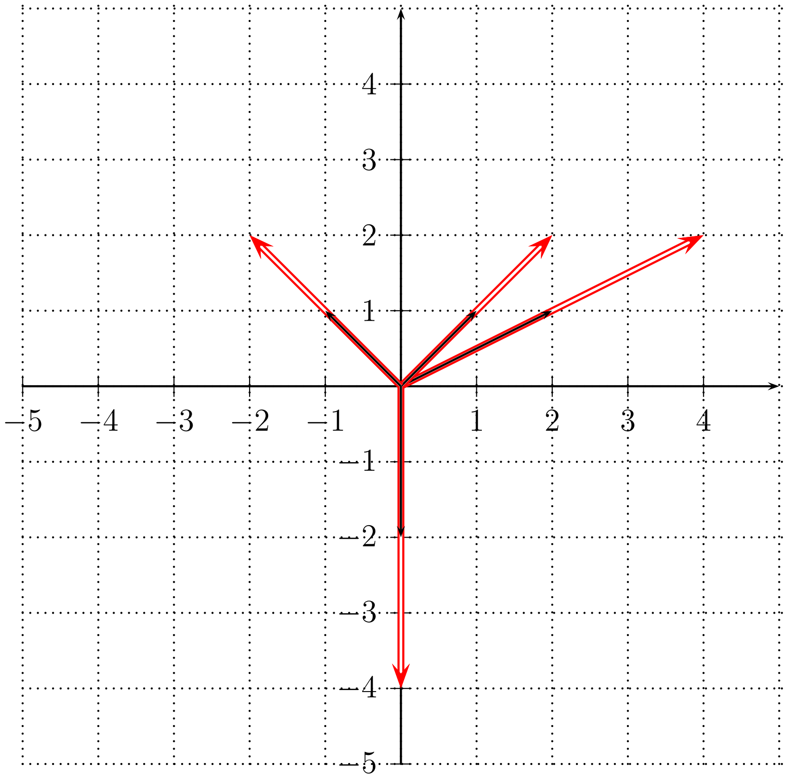
Definition 3.4. Ist ein Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit $P = \binom{x_1}{y_1}$ und ein $r \in \mathbb{R}$, so definieren wir den Punkt $r \cdot P$ durch

$$r \cdot P := \begin{pmatrix} rx_1 \\ rx_2 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns eine Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(r, P) \mapsto r \cdot P$.

Die Multiplikation eines festen $r \in \mathbb{R}$ mit jedem einzelnen Punkt aus $\mathbb{R}^2$ liefert eine Streckung oder Stauchung (bzw. eine Drehstreckung oder -stauchung) der euklidischen Ebene.

Im folgenden Bild ist $r = 2$ fest vorgegeben. Die Skalarmultiplikation von beliebigen Punkten aus dem $\mathbb{R}^2$ – hier wurde eine Auswahl durch schwarze Pfeile angedeutet – führt zu einer Verlängerung der entsprechenden Pfeile um den Faktor $r = 2$. Die mit 2 multiplizierten Punkte liegen an den Spitzen der roten Doppelpfeile. Der gesamte $\mathbb{R}^2$ wird also um den Faktor 2 gestreckt.



Entsprechend liefert die Multiplikation mit $0 < r < 1$ eine Stauchung des $\mathbb{R}^2$. Ist $r < 0$, so wird der $\mathbb{R}^2$ ebenfalls gestreckt, falls $r < -1$, oder gestaucht, falls $-1 < r < 0$, aber zusätzlich um 180° um den Nullpunkt $\binom{0}{0}$ gedreht. Die Skalarmulitiplikation mit -1 liefert eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um 180° um den Nullpunkt $\binom{0}{0}$.

Definition 3.5. Eine 2×2-Matrix A ist durch vier reelle Zahlen a, b, c, d gegeben, die wir wie folgt notieren:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Durch die Matrix A können wir eine Abbildung $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beschreiben, die wie folgt gegeben ist:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Satz 3.6. *Sei A eine 2×2-Matrix, f_A die dadurch beschriebene Abbildung und $P, Q \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$f_A(P + Q) = f_A(P) + f_A(Q).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 3.7. *Ist etwa* $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ *gegeben und* $P = \binom{1}{3}$ *und* $Q = \binom{0}{1}$*, so ist*

$$P + Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$f_A(P+Q) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + (-7) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -27 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} f_A(P) + f_A(Q) &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 8 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-7) \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + (-7) \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 \\ -20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -27 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definition 3.8. Das Produkt zweier 2×2-Matrizen $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ ist wie folgt gegeben:

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Satz 3.9. *Seien A und B zwei 2×2-Matrizen, f_A und f_B die dadurch beschriebene Abbildungen und sei $P \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:*

$$f_A \circ f_B(P) = f_{A \cdot B}(P).$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Beispiel 3.10. *Sind etwa* $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$ *und* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *gegeben, so ist*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 8 \cdot 0, & 3 \cdot 2 + 8 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + (-7) \cdot 0, & 1 \cdot 2 + (-7) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3, & 30 \\ 1, & -19 \end{pmatrix},$$

$$f_{A \cdot B}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x + 30y \\ 1x - 19y \end{pmatrix},$$

$$f_B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1x + 2y \\ 3y \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} f_A\left(f_B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) &= \begin{pmatrix} 3 \cdot (1x + 2y) + 8 \cdot 3y \\ 1 \cdot (1x + 2y) + (-7) \cdot 3y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x + 30y \\ 1x - 19y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Einige Beispiele (und Gegenbeispiele) von Isometrien kennen wir bereits:

Definition 3.11. Die Addition eines festen Elements $Q \in \mathbb{R}^2$ zu den Elementen aus $\mathbb{R}^2$ liefert uns eine Abbildung $f_Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Vorschrift $f_Q(P) := P+Q$. Diese nennen wir *Translation um* Q.

Satz 3.12. *Die für festes $Q \in \mathbb{R}^2$ definierte Abbildung $f_Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto P+Q$, ist eine Isometrie.*

Beweis. Wir berechnen den euklidischen Abstand $d := d_{\mathbb{R}^2}$:
Sei $Q = \binom{x}{y}$.
Sind $P, R \in \mathbb{R}^2$ gegeben, etwa $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $R = \binom{x_2}{y_2}$, so ist nach Definition

$$d(P,R) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Und der Abstand der Punkte $P + Q = \binom{x_1+x}{y_1+y}$ und $R + Q = \binom{x_2+x}{y_2+y}$ beträgt ebenfalls:

$$d(P+Q, R+Q) = \sqrt{(x_1 + x - (x_2 + x))^2 + (y_1 + y - (y_2 + y))^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

□

Bemerkung 3.13. *Die Skalarmultiplikation der Elemente aus $\mathbb{R}^2$ mit einem festen $r \in R$ liefert uns eine Abbildung $f_r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die Vorschrift $f_r(P) := r \cdot P$.*

Satz 3.14. *Die für festes $r \in \mathbb{R}$ definierte Abbildung $f_r\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto r \cdot P$, ist genau dann eine Isometrie, wenn $|r| = 1$ ist.*

Beweis. Wir berechnen den euklidischen Abstand $d := d_{\mathbb{R}^2}$:
Sind $P, R \in \mathbb{R}^2$ gegeben, etwa $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $R = \binom{x_2}{y_2}$, so ist nach Definition

$$d(P,R) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Und der Abstand der Punkte $r \cdot P = \binom{rx_1}{ry_1}$ und $r \cdot R = \binom{rx_2}{ry_2}$ beträgt:

$$d(r \cdot P, r \cdot R) = \sqrt{(rx_1 - rx_2)^2 + (ry_1 - ry_2)^2}$$

$$= \sqrt{(r(x_1 - x_2))^2 + (r(y_1 - y_2))^2} = \sqrt{r^2(x_1 - x_2)^2 + r^2(y_1 - y_2)^2}$$
$$= \sqrt{r^2((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)} = |r|\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Die beiden Abstände sind genau dann gleich, wenn $|r| = 1$ ist oder gleichzeitig $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$, also $P = R$ war.
Da wir aber mehr als einen Punkt im $\mathbb{R}^2$ haben, ist die Abbildung genau dann eine Isometrie, wenn $|r| = 1$ ist. □

Definition 3.15. Für eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir die *Determinante* $\det A$ *von* A durch
$$\det A := a \cdot d - b \cdot c.$$

Man kann zeigen:

Satz 3.16. *Die zu* $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *gehörige Abbildung* $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *die wie in Definition 3.5 definiert ist, ist genau dann eine Isometrie, wenn*

- $a^2 + c^2 = 1$,
- $b^2 + d^2 = 1$ *und*
- $ab + cd = 0$

ist.

In diesem Fall folgt: $|\det A| = 1$.

Beweis. Wir berechnen die Abstände zweier Punkte $P = \binom{x_1}{y_1}$ und $Q = \binom{x_2}{y_2}$ vor und nach Anwendung der zur Matrix A gehörigen Abbildung f_A:
$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

und
$$\begin{aligned} d\left(f_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right), f_A\left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right) &= d\left(\begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \sqrt{(ax1 + by_1 - (ax_2 + by_2))^2 + (cx_1 + dy_1 - (cx_2 + dy_2))^2} \\ &= \sqrt{(a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2))^2 + (c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2))^2} \\ &= \big(a^2(x_1 - x_2)^2 + 2ab(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + b^2(y_1 - y_2)^2 \\ &\quad + c^2(x_1 - x_2)^2 + 2cd(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + d^2(y_1 - y_2)^2\big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(a^2 + c^2)(x_1 - x_2)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (b^2 + d^2)(y_1 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

Nun ist $d\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right) = d\left(f_A\left(\binom{x_1}{y_1}\right), f_A\left(\binom{x_2}{y_2}\right)\right)$ genau dann, wenn
$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (a^2 + c^2)(x_1 - x_2)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (b^2 + d^2)(y_1 - y_2)^2,$$

also
$$(a^2 + c^2 - 1)(x_1 - x_2)^2 + 2(ab + cd)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (b^2 + d^2 - 1)(y_1 - y_2)^2 = 0$$

ist. Diese Gleichung muss für *alle* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt sein.

Ist $x_1 \neq x_2$, aber $y_1 = y_2$, so folgt: $(a^2 + c^2 - 1)(x_1 - x_2)^2 = 0$, und damit $a^2 + c^2 = 1$.

Ist $y_1 \neq y_2$, aber $x_1 = x_2$, so folgt: $(b^2 + d^2 - 1)(y_1 - y_2)^2 = 0$, und damit $b^2 + d^2 = 1$.

Also ist immer $2(ab + cd)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) = 0$. Ist nun $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$, so muss $ab + cd = 0$ sein.

Ist umgekehrt $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ und $ab + cd = 0$, so sind die beiden Abstände $d\left(\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2}\right)$ und $d\left(f_A\left(\binom{x_1}{y_1}\right), f_A\left(\binom{x_2}{y_2}\right)\right)$ natürlich gleich.

Dass der Betrag der Determinante von A in diesem Fall nur 1 sein kann, werden wir später zeigen. $\square$

Aus diesem Satz erhalten wir nun einige Beispiele.

Beispiel 3.17.
- *Die Identität, also die Abbildung auf* $\mathbb{R}^2$*, die durch* $P \mapsto P$ *gegeben ist, ist eine Isometrie.*

  Denn: Die 2×2*-Matrix* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *liefert gerade als zugehörige Abbildung die Identität, und* $1^2 + 0^2 = 0^2 + 1^2 = 1$ *und* $1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

- *Die Spiegelung an der* x*-Achse, also die Abbildung auf* $\mathbb{R}^2$*, die durch* $\binom{x}{y} \mapsto \binom{x}{-y}$ *gegeben ist, ist eine Isometrie.*

  Denn: Die 2×2*-Matrix* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *liefert gerade als zugehörige Abbildung die Spiegelung an der* x*-Achse, und* $1^2 + 0^2 = 0^2 + (-1)^2 = 1$ *und* $1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 0$.

- *Entsprechend gilt das natürlich auch für die Spiegelung an der* y*-Achse.*

- *Die Skalarmultiplikation im* $\mathbb{R}^2$ *mit einem festen Element* $r \in \mathbb{R}$ *ist genau dann eine Isometrie, wenn* $|r| = 1$ *ist.*[6]

  Denn: Die 2×2*-Matrix* $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ *liefert gerade als zugehörige Abbildung die Skalarmultiplikation mit* r*, und* $r^2 + 0^2 = 0^2 + r^2 = r^2 = 1$ *und genau dann, wenn* $|r| = 1$ *ist, und* $r \cdot 0 + 0 \cdot r = 0$.

Bemerkung 3.18. *Die Eigenschaft, dass die Determinante einer* 2×2*-Matrix betragsmäßig gleich 1 ist, reicht nicht aus, um eine Isometrie zu erhalten. Beispielsweise gilt*

$$\det A = 3 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 9 - 8 = 1,$$

wenn

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

[6] Das hatten wir zwar oben schon direkt nachgerechnet, aber wenn man den Satz 3.16 kennt, kann man es auch sofort zeigen.

ist. Aber die zugehörige Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$$

ist keine Isometrie, denn für den euklidischen Abstand d gilt:

$$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2} = 1,$$

aber

$$d\left(f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) = d\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \neq 1.$$

Für weitere Abbildungen können wir leicht nachrechnen, dass sie Isometrien sind:

Satz 3.19. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ fest und $A := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Dann ist die zugehörige Abbildung*

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\cos\alpha)x - (\sin\alpha)y \\ (\sin\alpha)x + (\cos\alpha)y \end{pmatrix}$$

eine Isometrie.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 3.20. *Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ fest gewählt, so beschreibt die zur Matrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ gehörige Abbildung eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt $\binom{0}{0}$ mit Drehwinkel α.*

Folgender Satz zeigt uns nun, dass die Hintereinanderausführung zweier Drehungen um den Nullpunkt gerade wiederum eine Drehung liefert und zwar um die Summe der Winkel der einzelnen Drehungen.

Satz 3.21. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dann gilt:*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Definition 3.22. Für $r \in \mathbb{R}$ und eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir

$$r \cdot A := \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}.$$

Bislang haben wir kein richtiges Verfahren kennengelernt, um Matrizen zu berechnen, die Umkehrabbildungen zu Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch 2×2-Matrizen gegeben sind, beschreiben. Im Prinzip ist die Berechnung aber ganz einfach, denn es gilt:

Satz 3.23. *Sei* $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *gegeben, so dass* $\det A \neq 0$ *ist, und die zugehörige Abbildung*

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}.$$

Dann wird die Umkehrabbildung zu f_A *durch die Matrix*

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gegeben.

Beweis. Wir zeigen, dass die Matrizenmultiplikation in beiden Richtungen die „Einheitsmatrix“ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt, die, wie wir bereits gesehen haben, als zugehörige Abbildung die Identität auf $\mathbb{R}^2$ liefert.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\det A} \cdot (ad-bc) & \frac{1}{\det A} \cdot (-ab+ba) \\ \frac{1}{\det A} \cdot (cd-dc) & \frac{1}{\det A} \cdot (-bc+da) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\det A}{\det A} & 0 \\ 0 & \frac{\det A}{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\det A}{\det A} & 0 \\ 0 & \frac{\det A}{\det A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.24.

- *Ist die Matrix* $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *gegeben (also die Matrix, die die Spiegelung an der y-Achse beschreibt), so ist eine zur Umkehrabbildung gehörige Matrix die folgende:*

$$\frac{1}{-1 \cdot 1 - 0 \cdot 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung ist also ihre eigene Umkehrabbildung.

- *Ist die Matrix* $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ *gegeben, so ist eine zur Umkehrabbildung gehörige Matrix die folgende:*

$$\frac{1}{7 \cdot 1 - 4 \cdot 3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Abbildungen im $\mathbb{R}^2$, die durch 2×2-Matrizen gegeben werden, verträglich mit der Addition auf dem $\mathbb{R}^2$ sind. Sie sind aber auch verträglich mit der Skalarmultiplikation:

Satz 3.25. *Sind $r \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}^2$ und eine 2×2-Matrix A gegeben, so gilt für die zugehörige Abbildung f_A Folgendes:*

$$f_A\,(r \cdot P) = r \cdot f_A\,(P)\,.$$

Beweis. Übungsaufgabe. □

Bemerkung 3.26. *Abbildungen im $\mathbb{R}^2$, die durch 2×2-Matrizen gegeben sind, sind schon dann eindeutig festgelegt, wenn man nur weiß, wohin die Punkte $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ abgebildet werden. Die Spalten der Matrix beschreiben gerade die Bilder von $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$.*

Denn: Ist eine 2×2-Matrix $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit der zugehörigen Abbildung f_A gegeben, so ist

$$f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

und

$$f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$

Ist ein beliebiger Punkt $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so lässt dieser sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da wir nach Satz 3.6 und Satz 3.25 wissen, dass

$$\begin{aligned} f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f_A\left(x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= x \cdot f_A\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + y \cdot f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

ist die Abbildung f_A bereits durch die Bilder von $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ eindeutig festgelegt.

Da wir in Satz 3.23 gesehen haben, wie man eine Matrix zu einer Umkehrabbildung einer durch eine Matrix gegebenen Abbildung ausrechnen kann, können wir nun ganz einfach sehen, dass Matrizen zu Isometrien eine Determinante vom Betrag 1 haben müssen.

Satz 3.27. *Sei eine 2×2-Matrix A gegeben, so dass die zugehörige Abbildung f_A eine Isometrie ist. Dann gilt:*

$$|\det A| = 1.$$

Beweis. Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so dass die zugehörige Abbildung f_A eine Isometrie ist, dann ist

$$B := \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

nach Satz 3.23 eine Matrix, die die Umkehrabbildung $f_B = (f_A)^{-1}$ zu f_A liefert.

Als Umkehrabbildung einer Isometrie muss f_B *auch* eine Isometrie sein: Wäre f_B keine Isometrie, so gäbe es zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$, so dass sich der euklidische Abstand d nach Anwendung von f_B auf P und Q ändern würde, also

$$d(P,Q) \neq d\left(f_B(P), f_B(Q)\right)$$

wäre. Dann wäre aber, da f_A eine Isometrie ist, auch

$$d(P,Q) \neq d\left(f_B(P), f_B(Q)\right) = d\left(f_A \circ f_B(P), f_A \circ f_B(Q)\right) = d(P,Q).$$

Widerspruch!

Nach Satz 3.16 ist die zur Matrix A gehörige Abbildung genau dann eine Isometrie, wenn gilt:

$$a^2 + c^2 = 1,\ b^2 + d^2 = 1 \text{ und } ab + cd = 0,$$

und die zur Matrix B gehörige Abbildung ist genau dann eine Isometrie, wenn gilt:

$$\frac{d^2 + (-c)^2}{(\det A)^2} = 1,\ \frac{(-b)^2 + a^2}{(\det A)^2} = 1 \text{ und } \frac{d \cdot (-b) + (-c) \cdot a}{(\det A)^2} = 0.$$

Insbesondere muss

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2$$

und

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{(\det A)^2} = 2$$

sein. Daraus folgt:

$$(\det A)^2 = 1$$

und daher:

$$|\det A| = 1.$$

□

4 Strecken, Strahlen, Ebenentrennungsaxiom

In diesem Abschnitt betrachten wir wieder ganz allgemein eine Menge $\mathcal{E}$ und eine Familie $\mathcal{L}$ von Teilmengen von $\mathcal{E}$ (=Geraden), für die die beiden Inzidenzaxiome und das Messlattenaxiom gelten. Weiterhin sei für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ ein festes Koordinatensystem f_L gewählt.

Im vorletzten Kapitel haben wir die so genannte Dreiecksungleichung gesehen (s. a. Aufgabe 1 auf Übungsblatt 2). Dabei war es wichtig zu unterscheiden, wie die zu den drei Punkten gehörigen reellen Zahlen zueinander lagen, welche Zahlen also größer oder kleiner waren. Ähnliches machen wir nun auch für eine beliebige euklidische Ebene $\mathcal{E}$.

Definition 4.1. Gegeben seien drei verschiedene Punkte P, Q, R auf einer Geraden L. Wir sagen: R liegt *zwischen* P und Q, falls gilt:

$$d(P,Q) = d(P,R) + d(R,Q).$$

Hierbei bezeichnet d den Abstand der Punkte, wie er durch das Koordinatensystem f_L für die Gerade $L \in \mathcal{L}$ gegeben ist.

Es gilt:

Satz 4.2.

- *Für je drei verschiedene Punkte auf einer Geraden liegt genau einer zwischen den beiden anderen.*
- *Für zwei verschiedene Punkte P, Q gibt es einen Punkt R auf der Geraden $L_{\overleftrightarrow{PQ}}$, der zwischen P und Q liegt.*
- *Für zwei verschiedene Punkte P, Q gibt es einen Punkt R auf der Geraden $L_{\overleftrightarrow{PQ}}$, so dass Q zwischen P und R liegt.*

Beweisidee.

- Das folgt aus den Eigenschaften der reellen Betragsfunktion und der Definition des Abstandes zweier Punkte mit Hilfe des vorgegebenen Koordinatensystems.
- Hier benutzt man die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.
- Hier benutzt man das Archimedische Axiom.

□

Definition 4.3. Seien P und Q zwei verschiedene Punkte in $\mathcal{E}$.

- Die *Strecke* $\overline{PQ}$ zwischen P und Q wird definiert durch

$$\overline{PQ} := \{R \in \overleftrightarrow{PQ} \mid R = P,\ R = Q \text{ oder } R \text{ liegt zwischen } P \text{ und } Q\}.$$

Die beiden Punkte P und Q nennen wir *Endpunkte* der Strecke.

- Der *Strahl* $\overrightarrow{PQ}$ von P durch Q wird definiert durch

$$\overrightarrow{PQ} := \{R \in \overleftrightarrow{PQ} \mid P \text{ ist nicht zwischen } Q \text{ und } R\}.$$

- Der zu $\overrightarrow{PQ}$ *entgegengesetzte Strahl* ist $\overrightarrow{PQ'}$, wobei Q' ein beliebiger Punkt auf $\overleftrightarrow{PQ}$ ist, für den P zwischen Q und Q' liegt.

Definition 4.4. Zwei Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ heißen *kongruent*, falls $d(P,Q) = d(R,S)$ ist, wobei d den jeweiligen Abstand der Punkte auf den Geraden bezeichnet. Wir schreiben dann: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$.

Beispiel 4.5. *Gegeben seien $P := (0,0)$, $Q := (1,1)$, $R := (1,2)$, $S := (2,1)$ und $T := (3,0)$. Als Koordinatensysteme wählen wir diejenigen aus Satz 2.10. Damit können wir die Abstände zwischen den Punkten als euklidische Abstände berechnen.*
Es gilt:

$$\overline{PQ} \cong \overline{RS} \text{ und } \overline{PQ} \ncong \overline{RT},$$

denn es ist (mit d als euklidischem Abstand):

$$d(P,Q) = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} = \sqrt{(1-2)^2 + (2-1)^2} = d(R,S)$$

und

$$d(R,T) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} \neq \sqrt{2} = d(P,Q).$$

Es gilt folgender Satz:

Satz 4.6. *Sind eine Strecke $\overline{PQ}$ und ein Strahl $\overrightarrow{RS}$ gegeben, so gibt es genau eine Strecke $\overline{RS'}$ mit $\overline{RS'} \cong \overline{PQ}$ und $\overline{RS'} \subseteq \overrightarrow{RS}$.*

Definition 4.7. Eine Teilmenge A der Ebene $\mathcal{E}$ heißt *konvex*, falls für beliebige Punkte $P, Q \in A$ auch $\overline{PQ} \subseteq A$ ist.

Ebenentrennungsaxiom
Für jede Gerade $L \in \mathcal{L}$ besteht das Komplement $\mathcal{E} \backslash L$ aus zwei nicht-leeren konvexen Mengen H_L^1 und H_L^2, so dass für beliebige Punkte $P \in H_L^1$ und $Q \in H_L^2$ gilt: $\overline{PQ} \cap L \neq \emptyset$. (Die Strecken $\overline{PQ}$ haben also jeweils (mindestens) einen Schnittpunkt mit der Gerade L.)

Definition 4.8. Die beiden Mengen H_L^1 und H_L^2 (wie oben) nennen wir *Halbebenen* und die Gerade L den *Rand* von H_L^1 bzw. H_L^2.

Lemma 4.9. *Sind L und L' zwei verschiedene Geraden in $\mathcal{E}$, so haben sie höchstens einen Schnittpunkt.*

Beweis. Angenommen, es gibt zwei Schnittpunkte von L und L', sagen wir P und Q. Dann gibt es nach dem zweiten Inzidenzaxiom genau eine Gerade $\overleftrightarrow{PQ}$ auf der P und Q liegen. Da aber $P, Q \in L$ und $P, Q \in L'$ sind, also L und L' beides Geraden sind, auf denen sowohl P als auch Q liegt, muss $L = \overleftrightarrow{PQ} = L'$ sein. Also sind L und L' nicht verschieden. $\square$

Mit Hilfe des Lemmas können wir nun folgenden Satz beweisen:

Satz 4.10. *Sei P ein Punkt auf einer Geraden L und $Q \notin L$. Dann liegt $\overrightarrow{PQ} \setminus \{P\}$ in der einen Hälfte der Halbebene bzgl. der Geraden L und $\overrightarrow{PQ'} \setminus \{P\}$ in der anderen, wobei $\overrightarrow{PQ'}$ den zu $\overrightarrow{PQ}$ entgegengesetzten Strahl bezeichnet.*

Beweis. Angenommen, es gibt einen Punkt $R \in \overrightarrow{PQ} \setminus \{P\}$, der nicht in derselben Halbebene wie Q liegt.

Ist $R \in L$, so gilt: $R \in \overleftrightarrow{QR} \cap L$. Da $P \in \overleftrightarrow{QR}$, ist aber auch $P \in \overleftrightarrow{QR} \cap L$, und mit obigem Lemma erhalten wir $R = P$. **Widerspruch!**

Ist dagegen $R \notin L$, so folgt aus dem Ebenentrennungsaxiom, dass $\overline{QR}$ einen Schnittpunkt mit L hat. Da $\overline{QR} \subseteq \overleftrightarrow{QR}$, folgt aus dem obigen Lemma, dass der Schnittpunkt P sein muss. Damit liegt aber P zwischen R und Q, so dass $R \notin \overrightarrow{PQ}$ ist. **Widerspruch!**

Da der Punkt P gerade zwischen Q und Q' liegt, muss sich Q' gerade in der Halbebene bzgl. L befinden, in der das Q nicht liegt. Dann kann man genauso zeigen, dass sich der andere Strahl $\overrightarrow{PQ'}$ ohne den Punkt P komplett in der anderen Halbebene befindet. □

5 Winkel und das Winkelmaßaxiom

Auch in diesem Abschnitt betrachten wir wieder eine euklidische Ebene $\mathcal{E}$ mit einer Familie $\mathcal{L}$ von Geraden, für die das Ebenentrennungsaxiom gilt.

Definition 5.1. Ein *Winkel* an einem Punkt $P \in \mathcal{E}$ besteht aus der Vereinigung zweier Strahlen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$. Wir bezeichnen diesen Winkel mit

$$\sphericalangle PQR.$$

Definition 5.2. Zwei Winkel $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle PQS$ heißen *sich ergänzend*, wenn die Strahlen $\overrightarrow{PR}$ und $\overrightarrow{PS}$ zueinander entgegengesetzt sind.

Definition 5.3. Sind $P, Q, R \in \mathcal{E}$ drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so bezeichnen wir die Halbebene bzgl. der Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$, in der R liegt mit H_R.

Definition 5.4. Sind $P, Q, R \in \mathcal{E}$ drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so definieren wir das *Innere des Winkels* $\sphericalangle PQR$ durch

$$\operatorname{int} \sphericalangle PQR := H_Q \cap H_R.$$

Wir führen nun weitere Axiome ein, das

Winkelmaßaxiome:
Sei $\mathcal{W}$ die Menge aller Winkel in $\mathcal{E}$. Dann gibt es ein *Winkelmaß* $m\colon \mathcal{W} \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

- Für jeden Winkel $\sphericalangle PQR \in \mathcal{W}$ ist

$$0 \leq m(\sphericalangle PQR) \leq 180.$$

- Für jeden Strahl $\overrightarrow{PQ}$ in einer Geraden L und jede Wahl einer Halbebene H bzgl. L gibt es zu jedem $0 \leq r \leq 180$ genau einen Strahl $\overrightarrow{PR}$ mit $R \in H$, so dass $m(\sphericalangle PQR) = r$ ist.

- Für jeden Punkt $S \in \operatorname{int} \sphericalangle PQR$ gilt:

$$m(\sphericalangle PQR) = m(\sphericalangle PQS) + m(\sphericalangle PSR).$$

- Für jedes sich ergänzende Winkelpaar $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle PRS$ gilt:

$$m(\sphericalangle PQR) + m(\sphericalangle PRS) = 180.$$

Definition 5.5. Wir nennen zwei Winkel $\sphericalangle PQR$ und $\sphericalangle STU$ *kongruent*, wenn sie dasselbe Winkelmaß haben. Ist das der Fall, so schreiben wir $\sphericalangle PQR \cong \sphericalangle STU$.

Wir setzen nun weiter voraus, dass für $\mathcal{E}$ und $\mathcal{L}$ die Inzidenzaxiome gelten.

Definition 5.6. Einen Winkel mit dem Winkelmaß 90 nennen wir einen *rechten Winkel*. Wir sagen, dass zwei verschiedene Geraden L und L' *senkrecht aufeinander stehen*, wenn es für den (nach Lemma 4.9 eindeutig bestimmten) Punkt $P \in L \cap L'$ zwei weitere Punkte $Q \in L \backslash \{P\}$ und $R \in L' \backslash \{P\}$ gibt, so dass der Winkel $\sphericalangle PQR$ ein rechter Winkel ist.

Damit können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 5.7. *Durch jeden Punkt $P \in \mathcal{E}$ in einer Geraden L gibt es genau eine Gerade L', die senkrecht auf L steht.*

Beweis. Wir wählen einen Punkt $Q \in L \backslash \{P\}$. Damit ist nach dem zweiten Inzidenzaxiom die Gerade L durch P und Q eindeutig bestimmt. Zu den Punkten P und Q gibt es nach dem zweiten Winkelmaßaxiom einen weiteren Punkt R, so dass für das Winkelmaß m und den entstehenden Winkel $\sphericalangle PQR$ gilt:

$$m(\sphericalangle PQR) = 90.$$

Der Strahl $\overrightarrow{PR}$ ist nach dem zweiten Winkelmaßaxiom eindeutig bestimmt. Weiterhin ist nach dem zweiten Inzidenzaxiom die Gerade durch P und R eindeutig bestimmt. Da die Strahlen $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$ in den Geraden $\overleftrightarrow{PQ}$ und $\overleftrightarrow{PR}$ liegen (und diese eindeutig bestimmt sind), erhält man die Aussage. $\square$