IQB-Aufgaben

Mathematik

2015 – 2020

Diese Zusammenstellung enthält **alle** IQB-Aufgaben der Jahre **2015** (Sammlung) und **2017-2020** (Pools), die mit den Vorgaben für die schriftliche Abiturprüfung im Leistungsfach in **Baden-Württemberg ab 2023** übereinstimmen.

Berücksichtigt sind die **Sachgebiete**:

- Analysis
- Analytische Geometrie
  (ohne Alternative A1: „Beschreibung mathematischer Prozesse durch Matrizen“)
- Stochastik
  (ohne Alternative B1: Schätzung von Parametern“)

Von den Aufgaben mit **Hilfsmitteln** (Teil B) sind enthalten:

- Analysis:	nur Aufgaben für WTR
- Geometrie:	Aufgaben für WTR Aufgaben für CAS (sofern nicht inhaltsgleich mit WTR)
- Stochastik:	Aufgaben für WTR Aufgaben für CAS (sofern nicht inhaltsgleich mit WTR)

Teil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Teil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

2015 – 1.1

Das Rechteck ABCD mit $A(1|0)$, $B(4|0)$, $C(4|2)$ und $D(1|2)$ wird durch den Graphen der in $\mathbb{R}^+$ definierten Funktion f mit $f(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$ in zwei Teilflächen zerlegt. Ermitteln Sie das Verhältnis der Inhalte der beiden Teilflächen. 5

Erwartungshorizont

Der Graph von f schneidet das Rechteck für $x = 2$ und $x = 4$.

Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 4$ einschließt: $\int_2^4 f(x)\,dx = \left[2x + \frac{8}{x}\right]_2^4 = 2$

Flächeninhalt des Rechtecks: 6

Verhältnis: 1 : 2

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
	5		X	X	X			II			II	I

2015 – 1.2

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln\left(e^2 - x\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D.	
a Geben Sie D an.	1
b Bestimmen Sie die Nullstelle von f.	1
c Weisen Sie rechnerisch nach, dass $y = -\frac{1}{e^2} \cdot x + 2$ eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $\left(0 \mid f(0)\right)$ ist.	3

Erwartungshorizont

a $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < e^2\right\}$

b $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$

c $f'(x) = \frac{1}{x - e^2}$

Es gilt: $f(0) = 2$, $f'(0) = -\frac{1}{e^2}$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	1				X						I	
b	1	X			X						I	
c	3		X		X		II				II	

2015 – 2.1

Abbildung 1 stellt für einen Wassertank die Zufluss- bzw. Abflussrate (in $\frac{m^3}{h}$) von Wasser für einen Beobachtungszeitraum von sechs Stunden dar. Zu Beginn der Beobachtung enthält der Tank $2\,m^3$ Wasser.

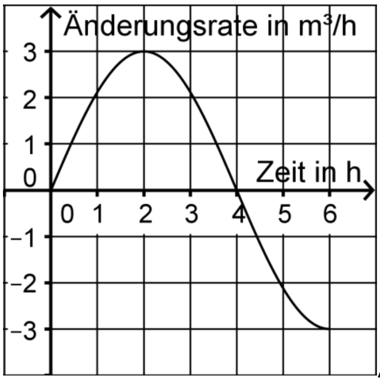


Abb. 1

a Bestimmen Sie das Volumen des Wassers, das sich zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn im Tank befindet. 2

b Skizzieren Sie in Abbildung 2 den Graphen, der die Entwicklung des Volumens des Wassers im Tank in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. 3

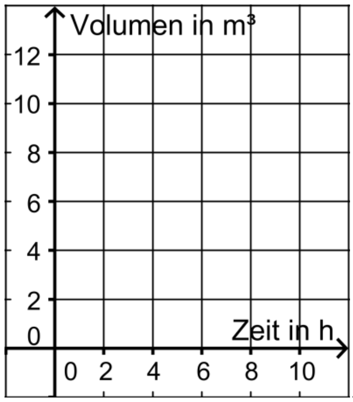
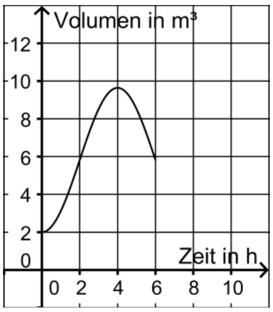


Abb. 2

Erwartungshorizont

a Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich etwa $5{,}8\,m^3$ Wasser im Tank.

b



Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2		X		X			II	II	II		
b	3		X		X			III	II	III		

2017 – 1.1

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f. 2

b Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist. 3

Erwartungshorizont

a $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln\frac{1}{2}$

b $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

Steigung der Tangente: $f'(0) = 1$

Folglich ist ein Winkel des Dreiecks 45° groß. Da die Koordinatenachsen einen rechten Winkel einschließen, beträgt die Größe des dritten Winkels ebenfalls 45°. Damit stimmen zwei Winkel des Dreiecks überein.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2	X			X						I	
b	3		X	X	X		II	II			I	

2017 – 1.2

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t)=3t^2-60t+500$ mit $t\in\mathbb{R}$, $0\le t\le 10$, beschrieben werden.

a Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung. 3

b Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde -30 beträgt. 2

Erwartungshorizont

a $\frac{n(2)-n(0)}{2}=\frac{392-500}{2}=-54$

b $n'(t)=6t-60$, $n'(t)=-30 \Leftrightarrow t=5$

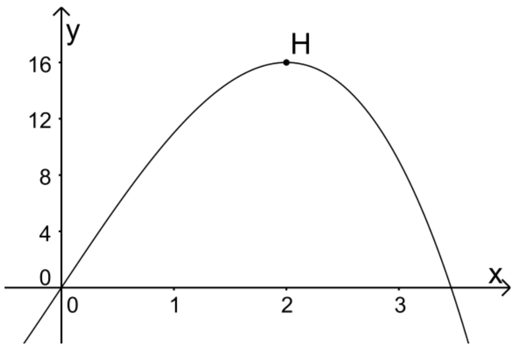
Der Zeitpunkt ist fünf Stunden nach Beginn der Messung erreicht.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	3		X		X				II		I	II
b	2	X	X		X				II		I	II

2017 – 2.1

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.



a Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen für $0 \le x \le 2$ eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt. 2

b Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen für $0 \le x \le 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der y-Achse. 3

Erwartungshorizont

a $\int_0^2 f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2\right]_0^2 = 20$

b Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $y = 16$ schließen eine Fläche mit dem Inhalt $2 \cdot 16 - 20 = 12$ ein, die y-Achse, die Gerade mit der Gleichung $y = 16$ und die Gerade g also eine Fläche mit dem Inhalt $20 - 12 = 8$.

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h = 8 \Leftrightarrow h = 8$

Koordinaten des Schnittpunkts: $(0|24)$

Standardbezug

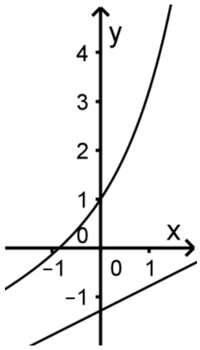
	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2		X	X	X					I	II	
b	3	X	X	X	X		III	III				II

2018 – 1.1

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$.

a Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in IR definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen. 2

b Für eine positive reelle Zahl c wird die in IR definierte Funktion g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c$ betrachtet. Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g_c. Die beiden Graphen schließen mit der y-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein. Berechnen Sie c. 3



Erwartungshorizont

a Die Funktionsterme von f und g unterscheiden sich nur in den Summanden e^x bzw. -1. Es gilt $e^x \neq -1$ für alle $x \in IR$.

b $$\int_0^1 \left(f(x) - g_c(x)\right)dx = \int_0^1 \left(e^x + c\right)dx = \left[e^x + cx\right]_0^1 = e + c - 1$$

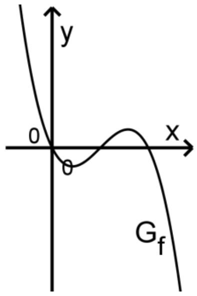
$$e + c - 1 = 3 \Leftrightarrow c = 4 - e$$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			X	X		I			I	I		2		
b	3	X	X	X	X			II		II	II			3	

2018 – 1.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f, der bei $x = 1$ den Wendepunkt W hat.



a Zeigen Sie, dass die Tangente an G_f im Punkt W die Steigung 1 hat. 2

b Betrachtet werden die Geraden mit positiver Steigung m, die durch W verlaufen. Geben Sie die Anzahl der Schnittpunkte dieser Geraden mit G_f in Abhängigkeit von m an. 3

Erwartungshorizont

a $f'(x) = -3x^2 + 6x - 2$, $f'(1) = 1$

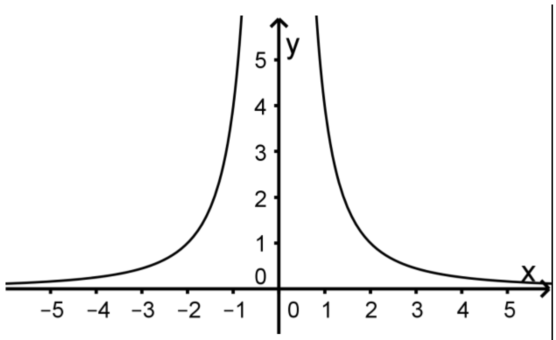
b Die Anzahl der Schnittpunkte ist 3 für $0 < m < 1$ und 1 für $m \geq 1$.

Standardbezug

	BE	**Leitideen**					**allgemeine mathematische Kompetenzen**						**Anforderungsbereich**		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	2		X		X						I		2		
b	3			X	X		II	II		II				3	

<u>2018 – 2.1</u>

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathrm{IR} \setminus \{0\}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{x^2}$. G_f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse.



a Die Gerade, die parallel zur x-Achse durch den Punkt $P(0|p)$ verläuft, schneidet G_f in zwei Punkten. Der Abstand dieser beiden Schnittpunkte ist 1. Berechnen Sie den Wert von p. 2

b Die Koordinatenachsen schließen mit der Tangente an G_f in einem Punkt $Q(u|f(u))$ mit $u > 0$ ein gleichschenkliges Dreieck ein. Berechnen Sie die Koordinaten von Q. 3

<u>Erwartungshorizont</u>

a $p = f(0{,}5) = 16$

b $f'(x) = -\frac{8}{x^3}$, $f'(u) = -1 \Leftrightarrow u = 2$, $f(2) = 1$

<u>Standardbezug</u>

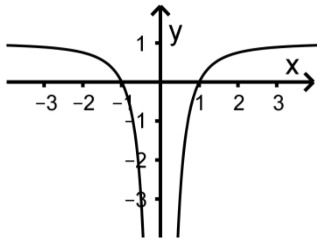
	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			X	X		III	III			I		1		1
b	3	X	X	X	X		III	III			II			1	2

2019 – 1.1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definierte Funktion

$f: x \mapsto 1-\frac{1}{x^2}$,

die die Nullstellen $x_1=-1$ und $x_2=1$ hat. Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y=-3$ gegeben.



a Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat. 1

b Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen. 4

Erwartungshorizont

a $f\left(\frac{1}{2}\right)=-3$

b

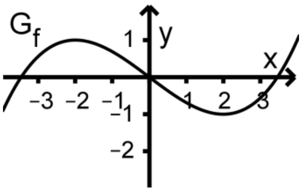
$$1\cdot 3+2\cdot\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx\right| = 3+2\cdot\left|\left[x+\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\right| = 3+2\cdot\frac{1}{2}=4$$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1				X		I				I	I	1		
b	4		X	X	X			II		I	II		1	3	

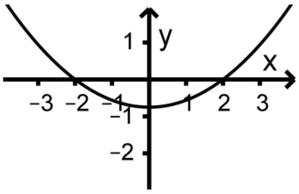
2019 – 1.2

Der abgebildete Graph G_f stellt eine Funktion f dar.

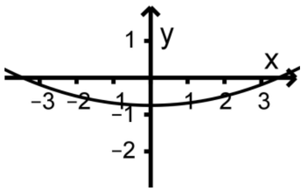


a Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen. 3

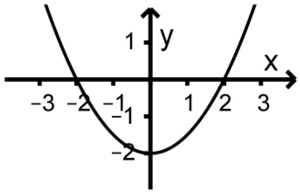
I



II



III



b Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe. 2

Erwartungshorizont

a Graph I
Begründung: Graph II kommt nicht infrage, da die Extremstellen von f Nullstellen von f' sein müssen. Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f im Punkt $(0\,|\,f(0))$ nicht kleiner als -1 ist.

b Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $F'(x) = f(x) \leq 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall monoton fallend.

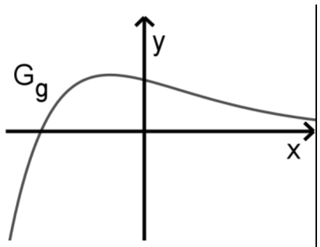
Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3		X	X	X		II	II		II				3	
b	2				X		II	I		I			1	1	

2019 – 2.1

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer in IR definierten, differenzierbaren Funktion g.

Betrachtet wird eine in IR definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.



a Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat. 2

b Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat. 3

Erwartungshorizont

a Wegen $f'(x) = e^{g(x)} > 0$ für alle $x \in IR$ hat der Graph von f keinen Extrempunkt.

b $f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

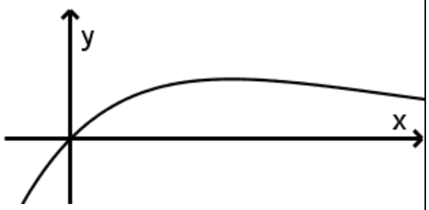
An der Stelle, an der g ein Maximum annimmt, ändert sich das Vorzeichen von $g'(x)$. Wegen $e^{g(x)} > 0$ ändert sich damit an dieser Stelle auch das Vorzeichen von $f''(x)$, d. h. der Graph von f hat einen Wendepunkt.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2		X		X		II			I	I		1	1	
b	3		X		X		III	III		II					3

2020 – 1.1

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $x \in \mathrm{IR}$. Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(a|0)$ und $Q(a|f(a))$ mit $a \in \mathrm{IR}^+$.



a Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ bestimmt werden kann. 2

b Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a. 3

Erwartungshorizont

a $\frac{1}{2}a \cdot f(a) = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot e^{-a} = \frac{1}{2}a^2e^{-a}$

b Betrachtet man $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ als Term einer Funktion A, so gilt für $a > 0$:

$$A'(a) = ae^{-a} - \frac{1}{2}a^2e^{-a} = \frac{1}{2}ae^{-a} \cdot (2-a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2		I		I	I		2		
b	3	I	II			II			3	

2020 – 1.2

Gegeben sind die in IR definierten Funktionen $f: x \mapsto \sin x$ und $g: x \mapsto x$. Die Graphen von f und g haben in ihrem einzigen gemeinsamen Punkt $O(0|0)$ die gleiche Steigung.

a Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, der Graph von g und die Gerade mit der Gleichung $x = \pi$ einschließen. 3

b Geben Sie eine Gleichung einer Tangente an den Graphen von f an, die die beiden folgenden Eigenschaften hat: 2

- Die Tangente verläuft parallel zum Graphen von g.
- Die Tangente enthält nicht den Punkt O.

Erwartungshorizont

a $\int_0^{\pi} (g(x) - f(x))\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi^2 - 2$

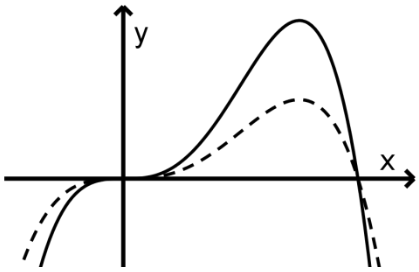
b $y = x - 2\pi$

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3		II			II		1	2	
b	2	II	II			I	I	1	1	

2020 – 1.3

Gegeben ist die Schar der in IR definierten Funktionen $f_k : x \mapsto -k \cdot \left(x^4 - 4x^3\right)$ mit $k \in \mathrm{IR}^+$. Alle Funktionen der Schar haben die Nullstellen 0 und 4. Die Abbildung stellt zwei Graphen der Schar dar.



a Bestimmen Sie die x-Koordinate des Hochpunkts des Graphen von f_k. 2

b Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das die Graphen von f_k und f_{k+1} einschließen, für alle Werte von k den gleichen Inhalt hat. 3

Erwartungshorizont

a $f_k'(x) = -k \cdot \left(4x^3 - 12x^2\right) = -4kx^2 \cdot (x-3)$

Da $f_k'(x)$ nur bei $x = 3$ sein Vorzeichen ändert, hat der Hochpunkt die x-Koordinate 3.

b $f_{k+1}(x) - f_k(x) = -(k+1) \cdot \left(x^4 - 4x^3\right) + k \cdot \left(x^4 - 4x^3\right) = -\left(x^4 - 4x^3\right)$

Da sowohl die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f_k und f_{k+1} als auch die Differenz $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ unabhängig von k sind, gilt dies auch für den Inhalt des Flächenstücks.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I				I		2		
b	3	II	II			I			3	

2020 – 2.1

Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a \cdot (x-2)^3$ und $x \in \mathbb{R}$.

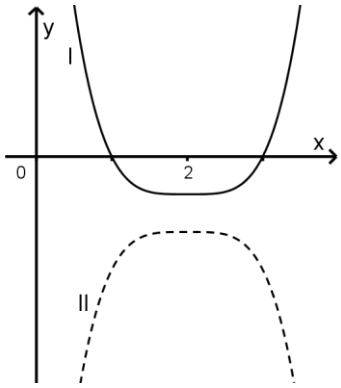
a Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist. 1

b Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben. 4

Erwartungshorizont

a $F'(x) = 2 \cdot (x-2)^3 = f_2(x)$

b Die Terme aller Stammfunktionen von f_a lassen sich durch $F_{a,b}(x) = \frac{a}{4} \cdot (x-2)^4 + b$ mit $b \in \mathbb{R}$ darstellen. Für $a > 0$ hat $F_{a,b}$ stets Funktionswerte, die nicht negativ sind (vgl. Graph I). Für $a < 0$ gibt es stets Werte von b, sodass $F_{a,b}$ nur negative Funktionswerte hat (vgl. Graph II).



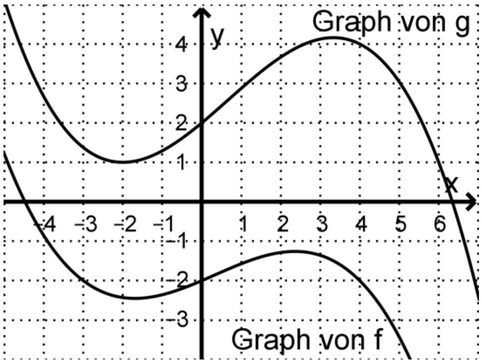
Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1					I		1		
b	4	III	III		II	II	III		1	3

2020 – 2.2

Die Abbildung zeigt die Graphen der ganzrationalen Funktionen f und g. Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x) = g(f(x))$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(4 | h(4))$.



5

Erwartungshorizont

$h'(4) = g'(f(4)) \cdot f'(4) = g'(-2) \cdot f'(4) = 0 \cdot f'(4) = 0$

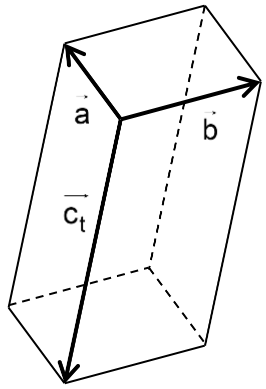
Mit $h(4) = g(f(4)) = g(-2) = 1$ ergibt sich für die gesuchte Gleichung $y = 1$.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
	5		III		II	II			2	3

2015 – 1.1

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_t} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix}$ spannen für jeden Wert von $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Körper auf. Die Abbildung zeigt den Sachverhalt beispielhaft für einen Wert von t.



a Zeigen Sie, dass die aufgespannten Körper Quader sind. 2

b Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die der zugehörige Quader das Volumen 15 besitzt. 3

Erwartungshorizont

a $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$, $\vec{a} \circ \vec{c_t} = 0$, $\vec{b} \circ \vec{c_t} = 0$

b $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c_t}| = 15 \Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{45} \cdot |t| = 15 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{3}$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2	X		X			I				I	
b	3	X	X	X				II			II	

2015 – 1.2

Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$ sowie der Punkt $P(-3\,|\,0\,|\,2)$.

a Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht in der Ebene E liegt. 1

b Spiegelt man den Punkt P an der Ebene E, so erhält man den Punkt P'. Ermitteln Sie die Koordinaten von P'. 4

Erwartungshorizont

a $2\cdot(-3)+0-2-4\neq 0$

b $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ r\in\mathbb{R}$

Schnittpunkt von E und g: $S(1\,|\,2\,|\,0)$

Mit $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{PS}$ ergibt sich $P'(5\,|\,4\,|\,-2)$.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	1			X			I				I	
b	4	X		X				II			II	

2015 – 2.1

Der Punkt $A\left(-2\,|\,3\,|\,\sqrt{12}\right)$ ist bezüglich des Koordinatenursprungs symmetrisch zum Punkt B. Die Punkte $C_r\left(3r\,|\,2r\,|\,0\right)$ mit $r \in \mathbb{R}$ bilden eine Gerade g, die im Koordinatenursprung senkrecht zur Geraden durch A und B steht. Bestimmen Sie alle Werte von r, für die A, B und C_r Eckpunkte eines Dreiecks mit dem Flächeninhalt 65 sind. 5

Erwartungshorizont

$B\left(2\,|\,-3\,|\,-\sqrt{12}\right)$

$\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC_r}\right| = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{13r^2} = 65 \Leftrightarrow r = -\sqrt{13} \vee r = \sqrt{13}$

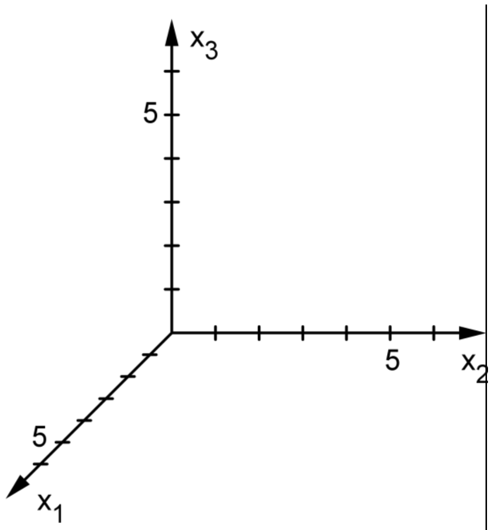
Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
	5	X	X	X				III			II	II

2017 – 1.1

Gegeben sind die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$ und

die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

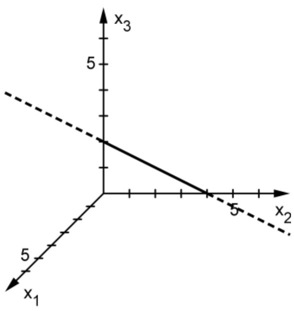


a Zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittgerade von E mit der x_2x_3-Ebene ein. 2

b Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E und g. 3

Erwartungshorizont

a



b $2 + 2\lambda + 1 - \lambda + 2 \cdot (-2 - 3\lambda) = 4 \Leftrightarrow \lambda = -1$

Damit: $(0|2|1)$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2	X		X				I		I	I	
b	3	X		X							II	

2017 – 1.2

Das Dreieck ABC mit den Punkten $A(3|3|3)$, $B(6|7|3)$ und $C(2|10|3)$ ist im Punkt B rechtwinklig und liegt in der Ebene mit der Gleichung $z = 3$.

a Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt $\frac{25}{2}$ besitzt. 2

b Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts D so, dass das Volumen der Pyramide ABCD gleich 25 ist. 3

Erwartungshorizont

a $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = 5$, $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$

b $\frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} \cdot h = 25 \Leftrightarrow h = 6$

mögliche Koordinaten: $(3|3|9)$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2	X	X	X				I			I	
b	3	X	X	X			II	II			II	

2017 – 2.1

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

a Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. 2

b Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punkts der Ebene E ist. 3

Erwartungshorizont

a Schnittpunkte von E mit der x_1- und x_2-Achse: $(-9\,|\,0\,|\,0)$, $(0\,|\,-18\,|\,0)$

Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$

b

Jeder Normalenvektor von E hat die Form $\begin{pmatrix} 2r \\ r \\ -2r \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$2 \cdot 2r + r - 2 \cdot (-2r) = -18 \Leftrightarrow r = -2$

Damit: $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2	X	X	X				II			I	
b	3	X		X				III			III	

2018 – 1.1

Gegeben sind die Ebene $E: x_2 - 3x_3 = -19$ sowie die Punkte $P(1\|2\|2)$, $Q(1\|-1\|11)$ und $S(-2\|-4\|5)$.	
a Zeigen Sie, dass S in der Ebene E liegt.	1
b Weisen Sie nach, dass die Gerade durch P und Q senkrecht zu E steht.	2
c Die Punkte P und Q haben den gleichen Abstand von der Ebene E. Die Punkte S und P legen die Gerade g fest. Spiegelt man g an E, so erhält man die Gerade h. Geben Sie eine Gleichung von h an.	2

Erwartungshorizont

a $-4 - 3 \cdot 5 = -19$

b Für $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ der Ebene gilt $\overrightarrow{PQ} = -3 \cdot \vec{n}$.

c Bezeichnet man den Koordinatenursprung mit O, so gilt:
$h: \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \lambda \cdot \overrightarrow{SQ},\ \lambda \in \mathbb{R}$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1	X		X							I		1		
b	2	X		X			I	II			I		1	1	
c	2			X			II	II				II		2	

2018 – 1.2

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$

und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

a Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an. Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen. 2

b Die Ebene E enthält die Geraden g und h. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

Erwartungshorizont

a Koordinaten des Schnittpunkts: $(3 \mid -3 \mid 3)$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

b

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zu den Richtungsvektoren von g und h. Damit hat die Gleichung von E die Form $x_2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Es gilt: $(3 \mid -3 \mid 3) \in E \Leftrightarrow c = -3$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X		X			I				I		2		
b	3	X		X				II			II			3	

2018 – 2.1

Der Punkt $P(0|1|5)$ ist Eckpunkt eines Quadrats. Orthogonal zu der Ebene, in der dieses Quadrat liegt, verläuft die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a Begründen Sie, dass das Quadrat in der yz-Ebene liegt. 2

b Der Schnittpunkt der beiden Diagonalen des Quadrats liegt auf der Gerade g, der Punkt $Q(0|8|4)$ in der yz-Ebene. Zeigen Sie, dass Q einer der beiden Eckpunkte des Quadrats ist, die dem Eckpunkt P benachbart sind. 3

Erwartungshorizont

a P liegt in der yz-Ebene, der Richtungsvektor von g steht senkrecht dazu.

b Schnittpunkt der Diagonalen: $S(0|4|1)$

Mit $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{SQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\left|\overrightarrow{SP}\right| = \left|\overrightarrow{SQ}\right|$ und $\overrightarrow{SP} \circ \overrightarrow{SQ} = 0$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X		X			II							2	
b	3	X	X	X			III	III			II				3

2019 – 1.1

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Ebene $E: x - y + z - 3 = 0$ und die Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}$ gegeben.

a Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den g_a senkrecht zu E steht. 2

b Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, für den g_a in E liegt. 3

Erwartungshorizont

a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 2 \wedge a = -3$

b Wegen $1 - (-2) + 0 - 3 = 0$ gilt $(1 | -2 | 0) \in E$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 - 1 - a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 3$

Damit gibt es einen Wert von a, für den g_a in E liegt.

Standardbezug

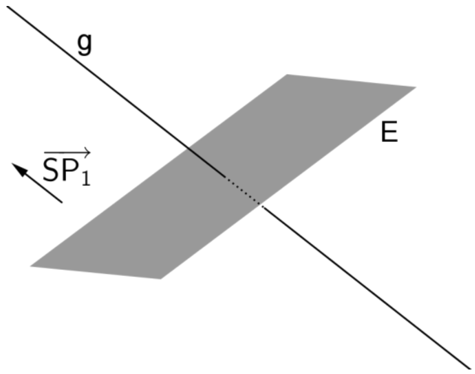
	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X		X			II	II			I		1	1	
b	3	X		X			II	II			I		1	2	

2019 – 1.2

Die Gerade $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E\colon\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2$ schneiden sich im Punkt S.

a Berechnen Sie die Koordinaten von S. 3

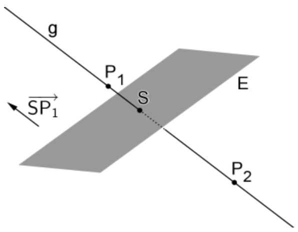
b Der Punkt P_1 liegt auf g, aber nicht in E. Die Abbildung zeigt die Ebene E, die Gerade g sowie einen Repräsentanten des Vektors $\overrightarrow{SP_1}$. Für den Punkt P_2 gilt $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_1} - 4 \cdot \overrightarrow{SP_1}$, wobei O den Koordinatenursprung bezeichnet. Zeichnen Sie die Punkte S, P_1 und P_2 in die Abbildung ein. 2



Erwartungshorizont

a $2r + 2 \cdot (2 + 4r) - 2r = 2 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{4}$, d. h. $S\left(-\frac{1}{2} \,|\, 1 \,|\, -\frac{1}{4}\right)$

b



Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	X		X							II		1	2	
b	2		X	X				II		II		I		2	

2019 – 2.1

a Die Ebene $E\colon\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6$ enthält einen Punkt, dessen drei Koordinaten übereinstimmen. Bestimmen Sie diese Koordinaten. 2

b Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: 3

Es gibt unendlich viele Ebenen, die keinen Punkt enthalten, dessen drei Koordinaten übereinstimmen.

Erwartungshorizont

a Mit $x_1 = x_2 = x_3 = a$ ergibt sich: $3a + 2a + 2a = 6 \Leftrightarrow a = \frac{6}{7}$

b Alle Punkte, deren drei Koordinaten übereinstimmen, liegen auf der Geraden mit der Gleichung $\vec{x} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $b \in \mathbb{R}$. Es gibt unendlich viele Ebenen, die parallel zu dieser Gerade sind und die Gerade nicht enthalten.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X		X				II			II		1	1	
b	3	X		X			III	III							3

2020 – 1.1

In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt. $M(8\,|\,5\,|\,10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

a Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5\,|\,1\,|\,0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt. 2

b Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten. Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T. 3

Erwartungshorizont

a P liegt in der x_1x_2-Ebene. Der Mittelpunkt der Grundfläche ist $N(8\,|\,5\,|\,0)$. Es gilt

$$\left|\overrightarrow{NP}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 5\,.$$

b $S(5\,|\,1\,|\,10)$

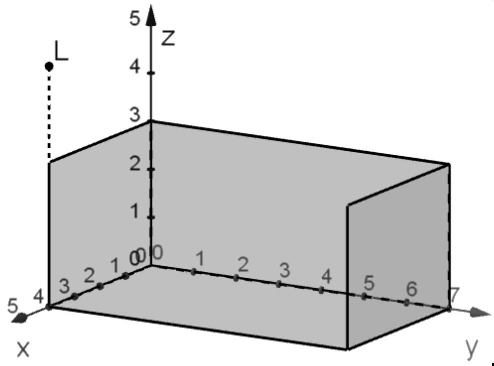
$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix}8\\5\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\9\\10\end{pmatrix}, \text{ d. h. } T(11\,|\,9\,|\,10).$$

Standardbezug

	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
a	2	I	II			I		1	1	
b	3	II	II			I		1	2	

2020 – 1.2

Die Abbildung zeigt in einem Koordinatensystem modellhaft eine 7 m breite Theaterkulisse. Die linke Seitenwand liegt im Modell in der xz-Ebene, die rechte Seitenwand ist dazu parallel. Ein auf der Bühne stehender Gegenstand wird von einer Lampe beleuchtet. Die Lampe wird im Modell durch den Punkt $L(4\,|\,0\,|\,5)$ dargestellt, die Spitze des Gegenstands durch den Punkt $S(1\,|\,6\,|\,2)$. 5



Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Schatten der Spitze auf der rechten Seitenwand liegt.

Erwartungshorizont

Alle Punkte der rechten Seitenwand haben im Modell die y-Koordinate 7.

$$\overrightarrow{OL}+\tfrac{7}{6}\cdot\overrightarrow{LS}=\begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}+\tfrac{7}{6}\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\7\\1{,}5\end{pmatrix}$$

Da $0<0{,}5<4$ und $0<1{,}5<3$ gilt, liegt der Schatten auf der rechten Seitenwand.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
	5	I	II	I	I	II	II	2	3	

2020 – 1.3

Betrachtet wird ein gerader Kegel. Die kreisförmige Grundfläche liegt in der xy-Ebene und hat den Mittelpunkt $M(2|0|0)$ sowie den Radius 5. Auf dem Rand der Grundfläche liegt ein Punkt P mit der x-Koordinate 6, auf der Mantelfläche der Punkt $Q(2|-4|1{,}5)$.

a Bestimmen Sie die möglichen y-Koordinaten von P. 2

b Ermitteln Sie die Höhe des Kegels. 3

Erwartungshorizont

a $\sqrt{5^2-4^2}=3$, d. h. die y-Koordinate ist -3 oder 3.

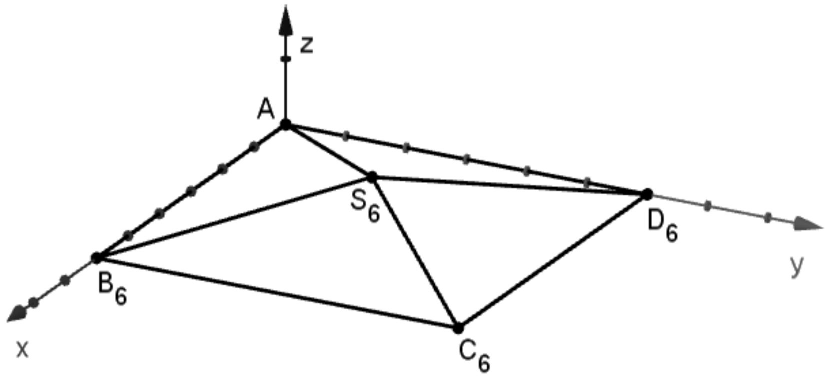
b $\frac{h}{1{,}5}=\frac{5}{5-4} \Leftrightarrow h=7{,}5$

Standardbezug

	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
a	2		II			I	I	1	1	
b	3		II			I	II	1	2	

2020 – 2.1

In einem Koordinatensystem werden die geraden Pyramiden $AB_tC_tD_tS_t$ mit $A(0|0|0)$, $B_t(t|0|0)$, $C_t(t|t|0)$ und $D_t(0|t|0)$ und $t \in \mathbb{R}^+$ betrachtet; die Punkte S_t haben jeweils die z-Koordinate $\frac{t}{8}$. Die Abbildung zeigt die Pyramide für $t = 6$.



Die Ebene $E: 3y + 4z = 24$ enthält den Punkt S_t für $t = 12$.

a Begründen Sie, dass E parallel zur x-Achse verläuft. 1

b Untersuchen Sie, für welche Werte von t die Pyramide und die Ebene E gemeinsame Punkte haben. 4

Erwartungshorizont

a Die Gleichung von E liefert nur eine Bedingung für die y- und z-Koordinate der Punkte der Ebene.

b E schneidet die xy-Ebene in der Gerade g mit der Gleichung $y = 8$. Für $t = 8$ liegt D_t auf g, für $t > 8$ befinden sich A und D_t auf verschiedenen Seiten von E und für $t < 8$ liegen alle Eckpunkte der Pyramide auf derselben Seite von E. Folglich haben die Pyramide und E genau dann gemeinsame Punkte, wenn $t \geq 8$ gilt.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1	I				I		1		
b	4	II	III				III		1	3

2020 – 2.2

Betrachtet wird die Schar der Geraden durch die Punkte $A(0|5|1)$ und $B_k(0|0|k)$; dabei nimmt der Parameter k alle Werte aus dem Intervall $[3;+\infty[$ an. Die Geraden schneiden die Ebene mit der Gleichung $x_3 = 2$. Ermitteln Sie die Koordinaten aller Schnittpunkte in einer Form, die keine Parameter enthält. 5

Erwartungshorizont

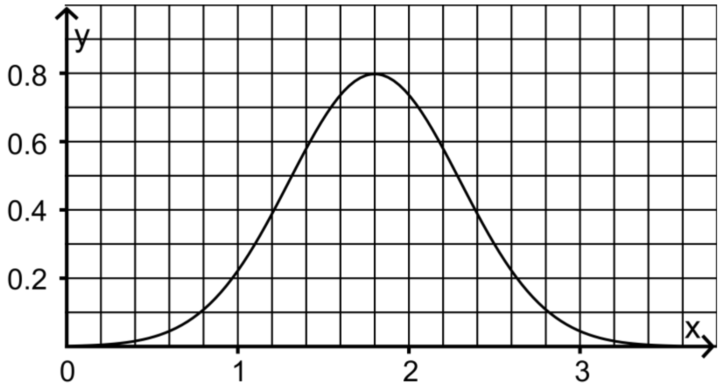
Die Schnittpunkte haben die x_1-Koordinate 0 und die x_3-Koordinate 2. Für $k = 3$ ist die x_2-Koordinate 2,5. Für zunehmende Werte von k wird die x_2-Koordinate größer und kommt dabei für $k \to +\infty$ dem Wert 5 beliebig nahe. Also gilt $2{,}5 \le x_2 < 5$.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
	5	III	III			II	II		2	3

2015 – 1.1

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X.



a Geben Sie den Erwartungswert von X an. 1

b Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert 2,4 annimmt. 1

c Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert aus dem Intervall $[1;1,4]$ annimmt. 3

Erwartungshorizont

a Der Erwartungswert beträgt etwa 1,8.

b $P(X=2,4)=0$

c $P(1 \leq X \leq 1,4) \approx 0,4 \cdot \frac{0,22+0,58}{2} = 16\,\%$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	1				X	X				I	I	
b	1				X	X					I	
c	3		X		X	X		II		II	II	

2015 – 1.2

Die Flächen zweier Würfel sind mit jeweils einem Buchstaben beschriftet:

Würfel 1: B, B, C, C, C, C   Würfel 2: A, A, A, B, B, C

a Würfel 1 wird zweimal geworfen. Eine Zufallsgröße beschreibt, wie oft dabei eine Fläche mit dem Buchstaben B gewürfelt wird. Berechnen Sie den Erwartungswert dieser Zufallsgröße. 2

b Einer der beiden Würfel wird zufällig ausgewählt und einmal geworfen; es wird eine Fläche mit dem Buchstaben C gewürfelt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei der Würfel 2 geworfen wurde. 3

Erwartungshorizont

a $P(X=1)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$, $P(X=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

Erwartungswert: $\frac{4}{9}\cdot 1+\frac{1}{9}\cdot 2=\frac{2}{3}$

b $\dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}}=\frac{1}{5}$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2		X		X	X		II	I		I	
b	3					X		II	I		II	

<u>2015 – 2.1</u>

Die binomialverteilten Zufallsgrößen X_1 und X_2 geben für Trefferwahrscheinlichkeiten von $p_1 = 0{,}8$ bzw. $p_2 = 0{,}2$ jeweils die Anzahl der Treffer bei fünf Versuchen an.

a Betrachtet wird die Zufallsgröße X_1. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer berechnet werden kann. 1

b Geben Sie für eine der beiden Zufallsgrößen ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term 2

$$1-\left(\binom{5}{3}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2+\binom{5}{4}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^1+\binom{5}{5}\cdot 0{,}8^5\right)$$

angegeben wird.

c Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_1. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_2 in Abbildung 2 dar. 2

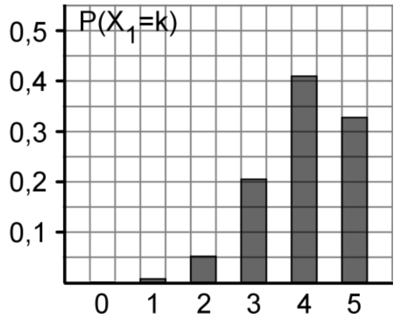


Abb. 1

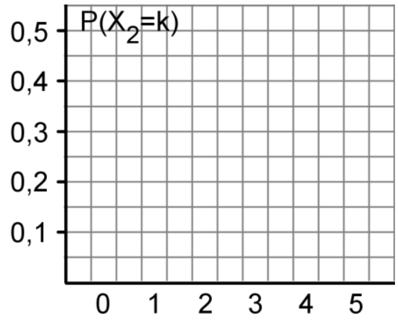


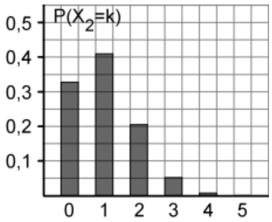
Abb. 2

Erwartungshorizont

a $P(X=1)=5\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^4$

b Für X_1 gibt der Term die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass höchstens zwei Treffer erzielt werden.

c



Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	1				X	X					I	
b	2				X	X	II	III				I
c	2				X	X	II	III		III		

2017 – 1.1

Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

a Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang. 2

b Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird. 1

c Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein.“ Beurteilen Sie die Aussage von Felix. 2

Erwartungshorizont

a Mit dem Term kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass bei sieben Drehungen der blaue Sektor nicht getroffen wird.

b $\binom{10}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^8$

c Die Aussage ist falsch, da die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der gelbe Sektor getroffen wird, bei allen Drehungen gleich groß ist.

Standardbezug

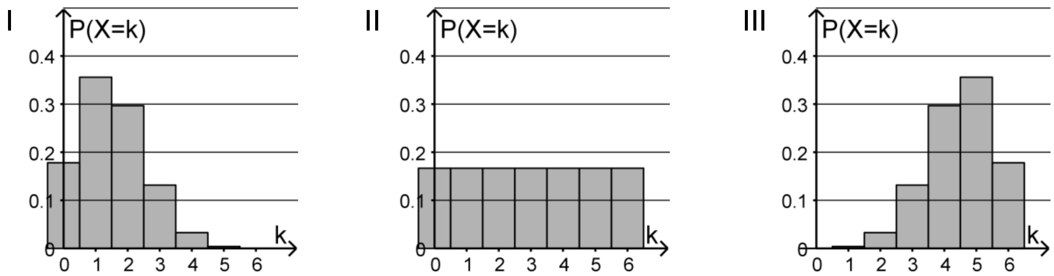
	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2					X	II	II	II			
b	1	X				X			I		I	
c	2					X	II		II			II

2017 – 1.2

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

a Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt. Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist. 2

b Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar: 3



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

Erwartungshorizont

a $0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$

b Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zeigt Abbildung I.

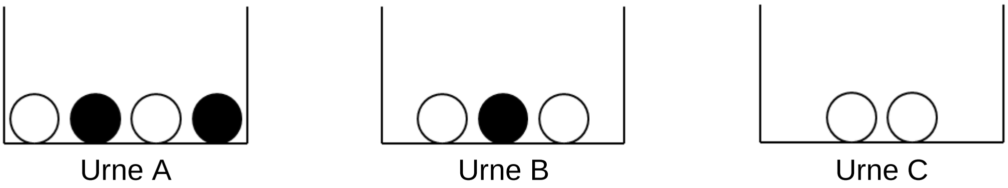
X ist binomialverteilt, der Erwartungswert von X ist $6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Abbildung II zeigt eine Gleichverteilung, Abbildung III eine Verteilung mit einem Erwartungswert, der größer als 1,5 ist.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2					X			I		I	
b	3		X		X	X	II		II	II		

2017 – 2.1

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



a Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden. 2

b Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel: 3

Es wird zunächst ein Einsatz von 1 Euro eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

Erwartungshorizont

a $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

b $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{18}$

$\frac{5}{18}\cdot(x-1)+\frac{13}{18}\cdot(-1)=0 \Leftrightarrow x=3{,}6$

Der Geldbetrag muss 3,60 Euro betragen.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen					
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6
a	2					X		II	II		I	
b	3	X	X		X	X		III	III		II	

2018 – 1.1

a Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}8$. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar. 3

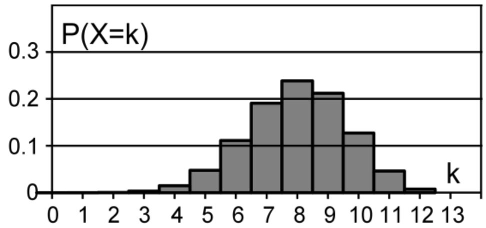


Abb. 1

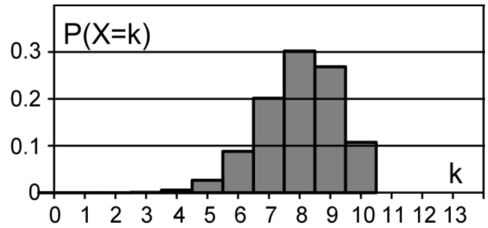


Abb. 2

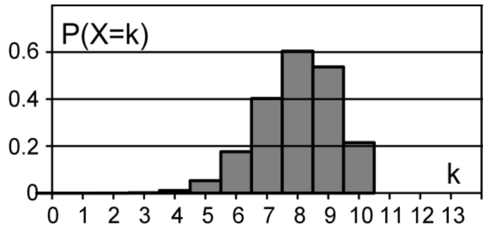


Abb. 3

Geben Sie die beiden Abbildungen an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen. Begründen Sie Ihre Angabe.

b Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern n und p. Es gilt: 2

- Der Erwartungswert von Y ist 8.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist symmetrisch.

Ermitteln Sie den Wert von n.

Erwartungshorizont

a Abbildung 1 stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht dar, da $P(X > 10) > 0$, Abbildung 3 nicht, da $\sum_{k=0}^{10} P(X = k) > 1$.

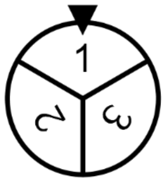
b Aufgrund der Symmetrie der Wahrscheinlichkeitsverteilung gilt $p = 0{,}5$.
$n \cdot 0{,}5 = 8 \Leftrightarrow n = 16$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3				X	X	II			I			1	2	
b	2		X		X	X	II	II			I			2	

2018 – 1.2

Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.



a Die Zufallsgröße X gibt die Summe der beiden erzielten Zahlen an. Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte. 2

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		

b Betrachtet werden die Ereignisse A und B: 3

A: „Es wird $(1;3)$, $(2;2)$ oder $(3;1)$ erzielt.“

B: „Beim ersten Drehen wird eine 2 erzielt.“

Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

Erwartungshorizont

a

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

b $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}=P((2;2))=P(A\cap B)$, d. h. A und B sind stochastisch unabhängig.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X			X	X			I	I	I		2		
b	3					X	II		II		I			3	

2018 – 2.1

Die Zufallsgrößen X und Y können jeweils die Werte 3, 4 und 5 annehmen.

a Für die Zufallsgröße X gilt: $P(X=3)=\frac{1}{3}$ und $P(X=4)=\frac{1}{4}$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. 2

b Für die Zufallsgröße Y gilt: $P(Y=3)=\frac{1}{3}$, $P(Y=4)\geq\frac{1}{6}$ und $P(Y=5)\geq\frac{1}{6}$. Bestimmen Sie alle Werte, die für den Erwartungswert von Y infrage kommen. 3

Erwartungshorizont

a $\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{1}{4}\cdot 4+\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot 5=\frac{49}{12}$

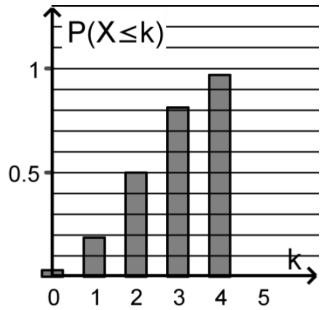
b Mit $\frac{1}{6}\leq P(Y=5)\leq\frac{3}{6}$ ergibt sich $\frac{23}{6}\leq E(Y)\leq\frac{25}{6}$.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2		X		X	X		II			I		1	1	
b	3		X		X	X	III	III			II				3

2019 – 1.1

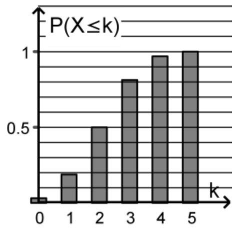
a Die Abbildung zeigt kumulierte Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit dem Parameter $n=5$. Zeichnen Sie in die Abbildung den zu $k=5$ gehörenden Wert ein und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X den Wert 2 annimmt. 2



b Betrachtet wird eine binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern $n=5$ und $p>0$. Es gilt $P(Y=4)=10\cdot P(Y=5)$. Berechnen Sie den Wert von p. 3

Erwartungshorizont

a



$P(X=2)\approx 0{,}5-0{,}2=0{,}3$

b Für $p>0$ gilt: $5\cdot p^4\cdot(1-p)=10\cdot p^5 \Leftrightarrow 5-5p=10p \Leftrightarrow 15p=5 \Leftrightarrow p=\frac{1}{3}$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2				X	X		II		I	I		1	1	
b	3	X			X	X		II			II	I		3	

2019 – 1.2

Ein Glücksrad besteht aus fünf gleich großen Sektoren. Einer der Sektoren ist mit „0“ beschriftet, einer mit „1“ und einer mit „2“, die beiden anderen Sektoren sind mit „9“ beschriftet.

a Das Glücksrad wird viermal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahlen 2, 0, 1 und 9 in der angegebenen Reihenfolge erzielt werden. 2

b Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen mindestens 11 beträgt. 3

Erwartungshorizont

a $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{625}$

b $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{25}$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2					X			I				2		
b	3	X				X	II	II			I			3	

2019 – 2.1

Eine Urne A ist mit fünf roten und fünf blauen Kugeln gefüllt, eine Urne B mit n roten und $3 \cdot n$ blauen, wobei $n > 0$ gilt. Aus der Urne A wird eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne B gelegt. Danach wird aus der Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in die Urne A gelegt. Nun befindet sich in der Urne A eine unbekannte Anzahl roter Kugeln.

a Geben Sie alle Möglichkeiten für diese unbekannte Anzahl an. 1

b Für einen bestimmten Wert von n beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die unbekannte Anzahl roter Kugeln in der Urne A fünf ist, $\frac{15}{29}$. Bestimmen Sie diesen Wert von n. 4

Erwartungshorizont

a In der Urne A können sich 4, 5 oder 6 rote Kugeln befinden.

b $\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{4n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3n+1}{4n+1} = \frac{4n+2}{2 \cdot (4n+1)} = \frac{2n+1}{4n+1} = \frac{15}{29} \Leftrightarrow n = 7$

Standardbezug

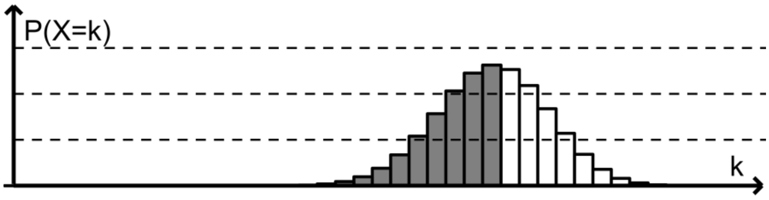
	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1					X			I			I	1		
b	4	X				X		III			II			1	3

2020 – 1.1

Gegeben sind die binomialverteilten Zufallsgrößen X und Y. X hat die Parameter $n = 40$ und $p_X = 0{,}65$.

a Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit $P(X = 30)$ berechnet werden kann. 1

b Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. 2



Für einen Wert von k stellen die grau markierten Säulen die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ dar. Ermitteln Sie diesen Wert von k.

c Die Zufallsgröße Y hat ebenfalls den Parameter $n = 40$. Geben Sie alle Werte von p_Y mit $0 < p_Y < 1$ an, für die die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 10)$ größer ist als die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 30)$. 2

Erwartungshorizont

a $\binom{40}{30} \cdot 0{,}65^{30} \cdot 0{,}35^{10}$

b Der Erwartungswert von X ist $40 \cdot 0{,}65 = 26$. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nimmt ihr einziges Maximum also für $k = 26$ an. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass dieser Wert von k mit dem gesuchten übereinstimmt.

c $p_Y < 0{,}5$

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1					I		1		
b	2	II	II		I	I		1	1	
c	2	II	II						2	

2020 – 1.2

Für ein Spiel werden ein Tetraeder und ein Würfel verwendet. Die Seiten des Tetraeders sind mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert, die des Würfels mit den Zahlen 1 bis 6. Ebenso wie beim Werfen des Würfels werden beim Werfen des Tetraeders alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt.

Zu Beginn des Spiels wird ein Einsatz von 5 Euro geleistet. Anschließend wird das Tetraeder einmal geworfen. Wird dabei die Zahl 3 erzielt, wird das Tetraeder ein weiteres Mal geworfen, andernfalls einmal der Würfel. Nur dann, wenn bei genau einem der beiden Würfe die Zahl 3 erzielt wird, erfolgt eine Auszahlung.

a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaliger Durchführung des Spiels mindestens einmal die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{3}{8}$ beträgt. 2

b Bei vielfacher Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich Einsätze und Auszahlungen mit der Zeit ausgleichen. Ermitteln Sie die Höhe der Auszahlung. 3

Erwartungshorizont

a $1-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{8}$

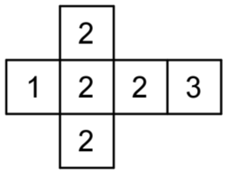
b $\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot x=\frac{5}{16}\cdot x=5\,€ \Leftrightarrow x=16\,€$

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			I		I	I	2		
b	3		II	II		I			3	

2020 – 1.3

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels.



a Der Würfel wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Zahlen 4 ist. 2

b Die Zahlen „1“ und „3“ werden jeweils durch eine neue Zahl ersetzt. Das Verhältnis der beiden neuen Zahlen ist ebenfalls $1:3$. Betrachtet man bei einmaligem Werfen des geänderten Würfels die geworfene Zahl, so ist der zugehörige Erwartungswert 4. Ermitteln Sie die beiden neuen Zahlen. 3

Erwartungshorizont

a $2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{2}$

b $\frac{1}{6}\cdot x+\frac{4}{6}\cdot 2+\frac{1}{6}\cdot 3x=4 \Leftrightarrow \frac{4}{6}x=\frac{8}{3} \Leftrightarrow x=4$

Die neuen Zahlen sind 4 und 12.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			I	I	I		2		
b	3		II	II		I			3	

2020 – 2.1

a Eine Urne enthält einhundert Kugeln, davon sind zwanzig weiß. Zwei Kugeln werden nacheinander zufällig gezogen; dabei wird die erste gezogene Kugel nicht zurückgelegt, bevor man die zweite zieht. Geben Sie in diesem Zusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99}$ angegeben wird. 1

b Eine andere Urne enthält ebenfalls einhundert Kugeln; für die Anzahl w der enthaltenen weißen Kugeln gilt $1 < w < 99$. Auch aus dieser Urne werden zwei Kugeln nacheinander zufällig gezogen. Die erste gezogene Kugel ist weiß. Betrachtet werden zwei Fälle: 4

1. Fall: Die erste gezogene Kugel wird nicht zurücklegt, bevor man die zweite zieht.

2. Fall: Die erste gezogene Kugel wird zurücklegt, bevor man die zweite zieht.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch die zweite gezogene Kugel weiß ist, beträgt im 1. Fall p, im 2. Fall ist sie 2 % von p größer. Berechnen Sie den Wert von w.

Erwartungshorizont

a Beide gezogenen Kugeln sind weiß.

b $\frac{w}{100} = 1{,}02 \cdot \frac{w-1}{99} \Leftrightarrow 99w = 102w - 102 \Leftrightarrow w = 34$

Standardbezug

	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
a	1			I	I		I	1		
b	4		III	III		II	II		1	3

2020 – 2.2

Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

a Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschieden Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term $\binom{3}{2} \cdot 14$ berechnet werden. Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang. 2

b In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen. 3

Erwartungshorizont

a Der erste Faktor gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, zwei der drei Farben auszuwählen, der zweite die Anzahl der Möglichkeiten für die Anzahl der Tulpen einer der beiden Farben.

b Es gibt eine Möglichkeit, den Strauß aus jeweils fünf Tulpen der drei Farben, und $3 \cdot 2$ Möglichkeiten, den Strauß aus vier Tulpen einer ersten Farbe, fünf Tulpen einer zweiten Farbe und sechs Tulpen der dritten Farbe zusammenzustellen – insgesamt also sieben Möglichkeiten.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			II	I		I	1	1	
b	3		III	II						3

2015 – WTR 1

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ und Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

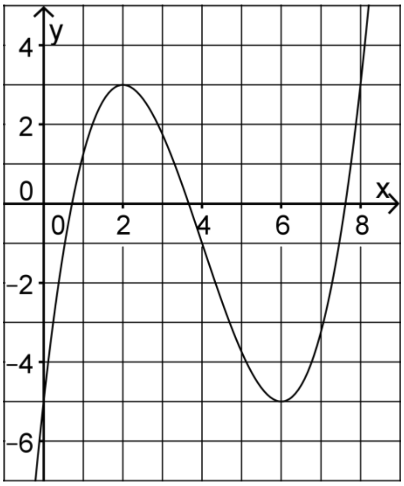


Abb. 1

a Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_f. 5

b Betrachtet wird die Gleichung $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1 die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von c. 4

Durch Verschiebung von G_f um 4 in negative x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung entsteht der Graph einer Funktion g.

c Geben Sie einen Term von g an, an dem man diese Verschiebung erkennen kann. 2

d Ein vereinfachter Term von g ist $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Punkts $(4 \mid -1)$ ist. 3

e Bestätigen Sie rechnerisch, dass $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ gilt. 3

f Bestimmen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion den Wert des Integrals $\int_5^7 f(x)\,dx$ und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in Abbildung 1. 5

Die Funktion f gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + ax - 5$ und $a \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

g Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_a. 3

h Die Wendepunkte aller Graphen G_a liegen auf einer zur y-Achse parallelen Geraden. Begründen Sie, dass man dies am Term von f_a erkennen kann. 2

i Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, durch den alle Graphen der Schar verlaufen. Bestimmen Sie den Wert von a so, dass sich die Graphen G_a und G_3 in diesem Punkt senkrecht schneiden. 5

j Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von a der Graph G_a keinen Punkt besitzt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft. 4

2 Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm (vgl. Abbildung 2).

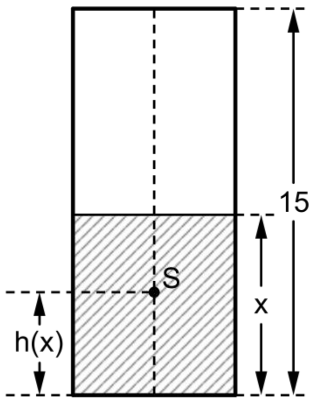


Abb. 2

Abbildung 3 zeigt den Graphen G_h der Funktion h, die für $0 \le x \le 15$ die Höhe des Schwerpunkts S über dem Dosenboden in Zentimetern angibt; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern. G_h hat den Tiefpunkt $(3\,|\,3)$.

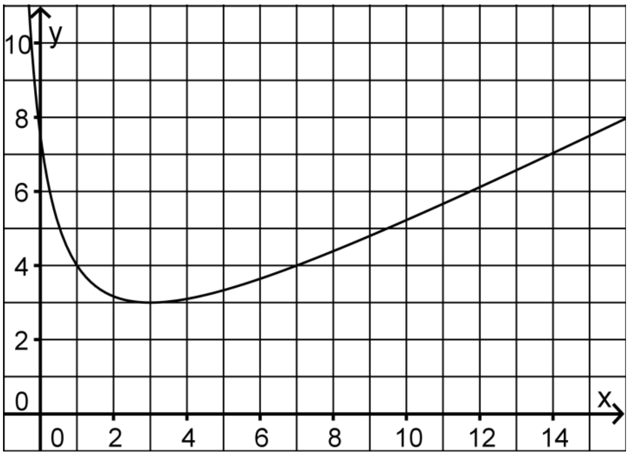


Abb. 3

a Ermitteln Sie grafisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt auf halber Höhe der Dose liegt. 2

b Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist. Beschreiben Sie die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs. Stellen Sie für den Moment, in dem sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe befindet, Dose, Füllhöhe und Schwerpunkt schematisch dar und beschreiben Sie die Besonderheit dieser Situation. 4

c Für die Funktion h gilt $h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$. Bestimmen Sie rechnerisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt 4 cm über dem Dosenboden liegt. 4

d Nun wird eine andere vertikal stehende Dose betrachtet, die ebenfalls die Form eines geraden Zylinders hat. Sowohl bei leerer als auch bei vollständig gefüllter Dose liegt der gemeinsame Schwerpunkt von Dose und enthaltener Flüssigkeit genau in der Mitte der Dose. Ist diese Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 11 cm. Die Höhe des Schwerpunkts wird durch eine Funktion k mit $k(x) = \frac{1}{2}x + s + \frac{t}{x+1}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ beschrieben. Bestimmen Sie die passenden Werte von s und t. 4

Erwartungshorizont

1 a $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=6$

Vorzeichenbetrachtung von $f'(x)$ führt zu:

Hochpunkt: $(2\,|\,3)$, Tiefpunkt: $(6\,|\,-5)$

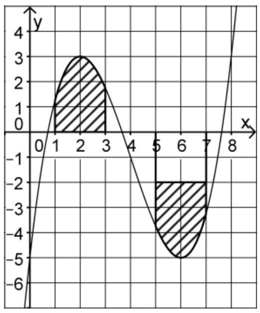
b Die Gleichung besitzt für $c<-5$ und für $c>3$ jeweils genau eine Lösung, für $c=-5$ und für $c=3$ jeweils genau zwei Lösungen und für $-5<c<3$ genau drei Lösungen.

c $g(x)=\left[\frac{1}{4}\cdot(x+4)^3-3\cdot(x+4)^2+9\cdot(x+4)-5\right]+1$

d Der angegebene Term von g enthält nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten; der Graph von g ist damit symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs. G_f geht aus dem Graphen von g durch Verschiebung um 4 in positive x-Richtung und um 1 in negative y-Richtung hervor und ist damit symmetrisch bezüglich des Punkts $(4\,|\,-1)$.

e $\int_1^3 f(x)\,dx=\left[\frac{1}{16}x^4-x^3+\frac{9}{2}x^2-5x\right]_1^3=5$

f $\int_5^7 f(x)\,dx=-\left(\int_1^3 f(x)\,dx+2\cdot 2\right)=-9$



g $f_a'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+a$, $f_a''(x)=\frac{3}{2}x-6$, $f_a''(x)=0 \Leftrightarrow x=4$

Wendepunkt: $(4\,|\,4a-37)$

h Der Parameter a ist im Funktionsterm von f_a nur im Summanden ax enthalten, tritt im Term der zweiten Ableitung von f_a also nicht auf. Damit ist die x-Koordinate des Wendepunkts von G_a unabhängig von a.

i Für $a_1 \neq a_2$ gilt: $f_{a_1}(x)=f_{a_2}(x) \Leftrightarrow a_1\cdot x=a_2\cdot x \Leftrightarrow x=0$

Damit verlaufen alle Graphen der Schar durch den Punkt $(0\,|\,-5)$.

$f_a'(0)=-\frac{1}{f_3'(0)} \Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}$

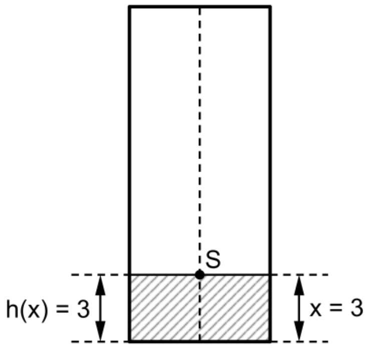
j $f_a'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2-6x+a=0$

Betrachtung der Diskriminante: $(-6)^2-4\cdot\frac{3}{4}\cdot a<0 \Leftrightarrow a>12$

2 a Als Lösungen der Gleichung $h(x)=7{,}5$ lassen sich der Abbildung 3 näherungsweise $x=0$ und $x=15$ entnehmen. Damit liegt der Schwerpunkt bei den Füllhöhen 0 cm und 15 cm jeweils auf halber Höhe der Dose.

b Die Höhe des Schwerpunkts S nimmt zunächst ab und steigt dann wieder bis zum Ausgangswert an.

Befindet sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe, so liegt er auf der Oberfläche der Flüssigkeit.



c $h(x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 7$

Bei den Füllhöhen 1 cm und 7 cm liegt der Schwerpunkt jeweils 4 cm über dem Dosenboden.

d $k(0) = 5{,}5 \Leftrightarrow s + t = 5{,}5$; $k(11) = 5{,}5 \Leftrightarrow s + \frac{t}{12} = 0$

Damit: $s = -\frac{1}{2}$, $t = 6$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	5	X			X		I				I		X		
b	4	X			X		II	II		II				X	
c	2			X	X					II	II			X	
d	3			X	X		III	III				II			X
e	3				X						I		X		
f	5		X	X	X		III	III		II					X
g	3	X			X						I		X		
h	2			X	X		II					II		X	
i	5	X	X	X	X			II			II			X	
j	4	X	X	X	X			II			III				X
2 a	2	X	X		X				I	II		II		X	
b	4		X	X	X				II	II		II		X	
c	4	X	X		X				I		II			X	
d	4	X		X	X			II	III		II				X

2017 – WTR 1

1 Abbildung 1 zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \le t \le 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.

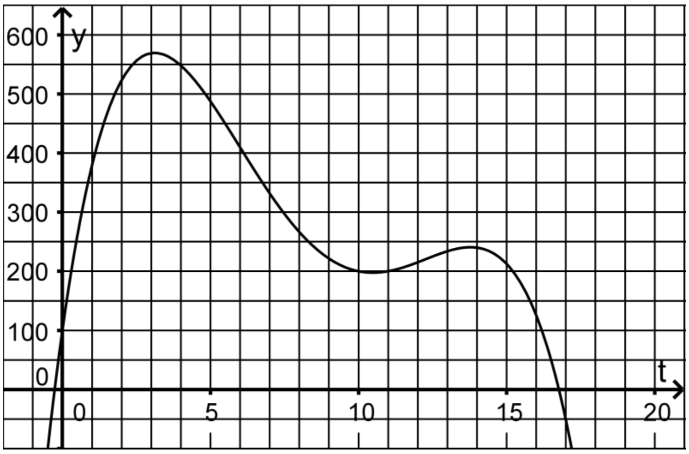


Abb. 1

a Geben Sie das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an sowie den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt. 3

b Bestimmen Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn. 4

c Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann. Geben Sie den Zeitpunkt an. 3

d Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang. Geben Sie eine Lösung der Gleichung an. 4

e Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat: 3

I $\quad y = -0{,}3t^4 + at^2 + 100,\ a \in \mathbb{R}$

II $\quad y = 8{,}5t^3 + 3{,}7t^2 + bt + 100,\ b \in \mathbb{R}$

2 Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \le t \le 15$ durch die Funktion g mit $g(t) = 0{,}4 \cdot \left(2t^3 - 39t^2 + 180t\right)$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Änderungsrate in $\frac{m^3}{h}$. Die Funktion G mit $G(t) = 0{,}2 \cdot \left(t^4 - 26t^3 + 180t^2\right)$ ist eine Stammfunktion von g.

a Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist. 5

b Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt. 4

c Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten. Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn. 4

d Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn. 5

3 Für jeden Wert $c \in \mathbb{R}^+$ ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h_c : x \mapsto c \cdot \sin(cx)$ gegeben. Abbildung 2 zeigt den Graphen von h_1.

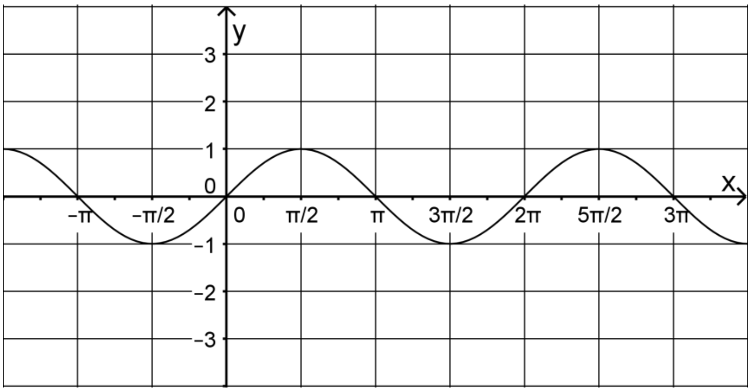


Abb. 2

a Skizzieren Sie für $c = \frac{1}{2}$ und $c = 2$ jeweils den Graphen von h_c in Abbildung 2. 4

b Eine Nullstelle von h_c ist 0, die benachbarte positive Nullstelle wird mit u bezeichnet. Geben Sie den Wert von u in Abhängigkeit von c an. Berechnen Sie damit den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h_c für $0 \leq x \leq u$ mit der x-Achse einschließt. 5

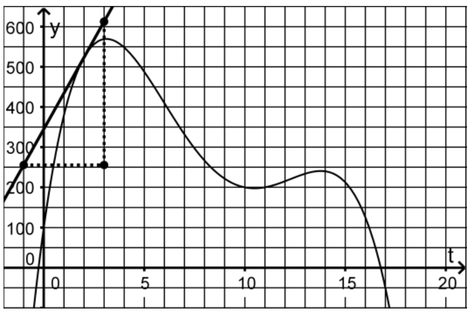
c Beschreiben Sie, wie man ohne Verwendung einer Ableitungsfunktion die Koordinaten eines Tiefpunkts des Graphen von h_c in Abhängigkeit von c ermitteln kann. Geben Sie die Koordinaten eines Tiefpunkts an. 3

d Geben Sie einen Term der 103. Ableitung von h_c an. 3

Erwartungshorizont

1 **a** Das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa $490\,\text{m}^3$. Der Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt, beginnt etwa 0,9 Stunden und endet etwa 6,8 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

b



$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{360}{4} = 90$

Die momentane Änderungsrate beträgt etwa $90\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

c Zeichnet man die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(15\,|\,f(15))$ in die Abbildung ein, so liefert die x-Koordinate des Schnittpunkts dieser Tangente mit der t-Achse den gesuchten Zeitpunkt.

Das Becken enthält etwa 19 Stunden nach Beobachtungsbeginn kein Wasser mehr.

d Die Lösung der Gleichung liefert diejenigen Zeitpunkte, zu dem das Volumen des Wassers 350 Kubikmeter größer ist als sechs Stunden später.

$t \approx 3$ (Hinweis: Weitere Lösung ist $t \approx 4$.)

e Der Graph einer Funktion der Form I ist symmetrisch zur y-Achse. Der Graph einer Funktion der Form II hat nur einen Wendepunkt.

2 a $g'(t) = 0{,}4 \cdot \left(6t^2 - 78t + 180\right)$, $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 13t + 30 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \vee t = 10$

Wegen $g(0) = 0$, $g(3) = 97{,}2$, $g(10) = -40$ und $g(15) = 270$ ist die momentane Änderungsrate 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal.

b $g(t) = 0 \Leftrightarrow 2t \cdot \left(t^2 - 19{,}5t + 90\right) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 7{,}5 \vee t = 12$

Da $g(10) < 0$, liegt der Zeitraum zwischen 7,5 und 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.

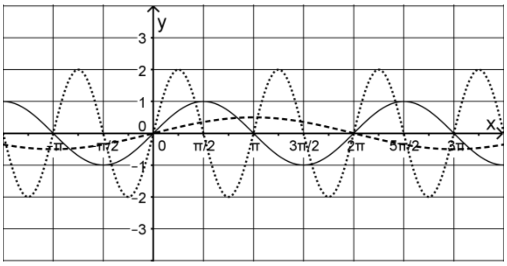
c $350 - \int_0^3 g(t)\,dt = 350 - \left[G(t)\right]_0^3 \approx 150$

Zu Beobachtungsbeginn enthielt das Becken etwa $150\,m^3$ Wasser.

d $\int_0^x g(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \left[G(t)\right]_0^x = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot \left(x^2 - 26x + 180\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Es gibt nach Beobachtungsbeginn keinen Zeitpunkt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

3 a



Der Graph zu $c = \frac{1}{2}$ ist gestrichelt, der zu $c = 2$ gepunktet dargestellt.

b Mit $u = \frac{\pi}{c}$ ergibt sich: $\int_0^{\frac{\pi}{c}} h_c(x)\,dx = \left[-\cos(cx)\right]_0^{\frac{\pi}{c}} = 2$

c Die x-Koordinate eines Tiefpunkts ergibt sich als Mittelwert der beiden kleinsten positiven Nullstellen von h_c, die zugehörige y-Koordinate als entsprechender Funktionswert von h_c.

Koordinaten dieses Tiefpunkts: $x = \frac{3\pi}{2c}$, $y = -c$

d $-c^{104} \cdot \cos(cx)$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3		X		X					I		I	X		
b	4		X	X	X				I	I	I		X		
c	3		X	X	X				II	II		II		X	
d	4	X			X			III	II	II					X
e	3				X		II			II	II			X	
2 a	5	X			X		I		I		II			X	
b	4	X			X		I		II		II			X	
c	4		X	X	X			III	II		II				X
d	5	X	X	X	X			III	II		III				X
3 a	4				X					I	I		X		

b	5		X	X	X			II			II			X	
c	3				X		II	II				II		X	
d	3				X		III	III			II				X

2017 – WTR 2

1 Für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion $f_k : x \mapsto k^2x^3 - 6kx^2 + 9x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a Geben Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an. 2

b Berechnen Sie die Nullstellen von f_k. 4

c Begründen Sie, dass G_k weder zum Koordinatenursprung noch zur y-Achse symmetrisch ist. 2

d Weisen Sie nach, dass $f_k'(x) = 3 \cdot (kx - 1) \cdot (kx - 3)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f_k ist. 3

e Berechnen Sie denjenigen Wert von k, für den sich die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_k um 6 unterscheiden. 4

f Für jeden Wert von k wird die Tangente an G_k im Wendepunkt $\left(\frac{2}{k} \mid \frac{2}{k}\right)$ betrachtet. Zeigen Sie, dass die Tangenten für unterschiedliche Werte von k parallel zueinander sind. 3

g Abbildung 1 zeigt für einen bestimmten Wert von k den Graphen von f_k sowie den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = f_k(x) + d$ mit $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ordnen Sie die beiden Funktionen jeweils einem der beiden Graphen I und II zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung und bestimmen Sie die Werte von k und d. 4

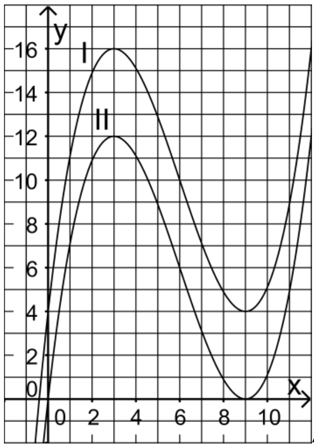


Abb. 1

h Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot f_1(2x)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von f_2 aus dem Graphen von f_1 hervorgeht. 2

Abbildung 2 zeigt den Graphen G_1 von f_1. Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen L und M mit $L(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$ und $M(x) = \int_3^x f_1(t)\,dt$.

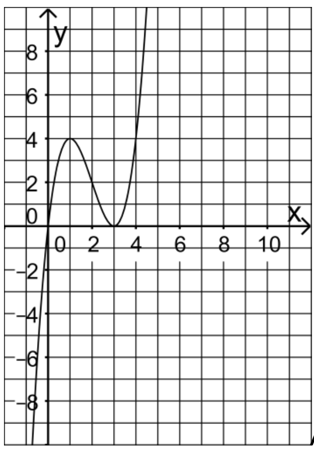


Abb. 2

i Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Punkt $(0 \mid 0)$ Tiefpunkt des Graphen der Funktion L ist. 3

j Geben Sie zwei besondere Eigenschaften des Graphen von L bei $x = 3$ an. Begründen Sie jeweils Ihre Angabe. 3

k Begründen Sie, dass der Graph der Funktion M aus dem Graphen der Funktion L durch eine Verschiebung in negative y-Richtung hervorgeht. 2

2 Betrachtet wird eine große rotationssymmetrische Schale, die aus einem Steinblock gefertigt wurde. Ein Kubikmeter des Steins hat eine Masse von 2700 kg.

In einem Koordinatensystem kann ein Querschnitt der Schale mithilfe der Graphen der folgenden Funktionen modellhaft dargestellt werden:

$p: x \mapsto \sqrt{6x}$, $0 \le x \le 6$ $\qquad$ $q: x \mapsto \sqrt{4x-8}$, $2 \le x \le 6$

Dabei beschreibt die x-Achse die Rotationsachse der Schale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 dm (vgl. Abbildung 3).

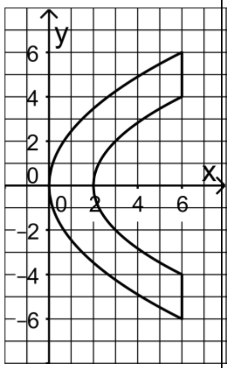
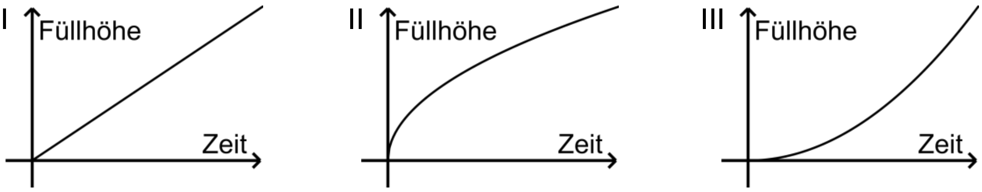


Abb. 3

a Interpretieren Sie den Term $p(6) - q(6)$ im Sachzusammenhang. 2

b In die aufrecht stehende Schale wird mit konstanter Zuflussrate Wasser gefüllt. Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III für diesen Vorgang die Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 2



c Weisen Sie nach, dass sich bei dem beschriebenen Füllvorgang der Flächeninhalt A der Wasseroberfläche (in dm^2) in Abhängigkeit von der Füllhöhe h (in dm) mithilfe der Gleichung $A(h) = 4\pi h$ berechnen lässt. 4

d Interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Funktion s mit 4

$s(x) = \pi \cdot \int_2^{2+x} (q(t))^2 \, dt$ und geben Sie den größten Definitionsbereich von s an,

der im Sachzusammenhang sinnvoll ist.

e Berechnen Sie die Masse der Schale. 6

Erwartungshorizont

1 **a** $\lim\limits_{x \to -\infty} f_k(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_k(x) = +\infty$

b $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{k}$

c f_k ist eine ganzrationale Funktion, deren Term Potenzen von x mit geraden und ungeraden Exponenten enthält.

d $f_k'(x) = 3k^2x^2 - 12kx + 9$, $3 \cdot (kx-1) \cdot (kx-3) = 3k^2x^2 - 12kx + 9$

e $f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \vee x = \frac{3}{k}$, $\frac{3}{k} - \frac{1}{k} = 6 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$

f Für jeden Wert von k ist die Steigung der betrachteten Tangente $f_k'\left(\frac{2}{k}\right) = -3$.

g I: h, II: f_k
Begründung: Nur der Graph II verläuft durch den Koordinatenursprung.

Der Schnittpunkt des Graphen I mit der y-Achse liefert $d = 4$, die Lage der Extrempunkte des Graphen II $k = \frac{1}{3}$.

h Der Graph von f_2 geht aus dem Graphen von f_1 durch Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung und Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ in y-Richtung hervor.

i $L(0) = 0$, $L'(x) = f_1(x)$, $f_1(0) = 0$, $f_1(x) < 0$ für $x < 0$, $f_1(x) > 0$ für $x > 0$

j
- Die Tangente an den Graphen von L im Punkt $\left(3 \mid L(3)\right)$ verläuft parallel zur x-Achse.
  Begründung: $f_1(3) = 0$
- Der Graph von L besitzt im Punkt $\left(3 \mid L(3)\right)$ einen Wendepunkt.
  Begründung: Der Graph von f_1 hat im Punkt $\left(3 \mid f_1(3)\right)$ einen Tiefpunkt.

k
$$M(x) = L(x) - \int_0^3 f_1(t)\,dt$$

Der Abbildung ist zu entnehmen, dass $\int_0^3 f_1(t)\,dt > 0$ gilt.

2 a Der Term gibt die Breite des Rands der Schale in Dezimetern an.

b Graph II
Begründung: Da der Durchmesser der Schale nach oben hin zunimmt, nimmt die Änderungsrate der Füllhöhe mit der Zeit ab.

c $A(h) = \pi \cdot \left(q(2+h)\right)^2 = 4\pi h$

d Die Funktion s beschreibt das Volumen des Wassers in der Schale in dm^3 in Abhängigkeit von der Füllhöhe x in dm.

Definitionsbereich: $[0;4]$

e
$$\pi \cdot \int_0^6 \left(p(x)\right)^2 dx - \pi \cdot \int_2^6 \left(q(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \left[3x^2\right]_0^6 - \pi \cdot \left[2x^2 - 8x\right]_2^6 = 76\pi$$
$76\pi \cdot 2{,}7 \approx 645$, d. h. die Masse der Schale beträgt etwa 645 kg.

<u>Standardbezug</u>

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	X			X						I		X		
b	4	X			X						I		X		
c	2			X	X		I				I	I	X		
d	3				X						II			X	
e	4	X			X			I			II			X	
f	3		X	X	X		II				II	I		X	
g	4				X		II			II	II			X	
h	2			X	X		II			II		I		X	

i	3				X		II			II	II			X	
j	3				X		III			II	II				X
k	2			X	X		III			II	II				X
2 a	2		X	X	X		I		I			I	X		
b	2			X	X		II			II		II		X	
c	4		X	X	X			II	II		II			X	
d	4		X	X	X		III	III	III						X
e	6		X	X	X			III	II		III				X

2017 – WTR 3

1 Gegeben ist die Schar der Funktionen f_k mit $f_k(x) = -x^4 + 6kx^2$, $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Nullstellen von f_k. 4

b Begründen Sie, dass G_k für alle Werte von k symmetrisch zur y-Achse ist und für $k \leq 0$ nicht oberhalb der x-Achse verläuft. 3

c Weisen Sie nach, dass G_k für $k > 0$ genau zwei Hochpunkte besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten dieser Hochpunkte in Abhängigkeit von k. 5

(zur Kontrolle: Koordinaten eines Hochpunkts: ($\sqrt{3k}\mid 9k^2$))

d Untersuchen Sie für $k > 0$ mithilfe der Lage eines der beiden Hochpunkte von G_k in Abhängigkeit von k, wie viele gemeinsame Punkte G_k und die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ haben. 4

e Die in Abbildung 1 dargestellten Graphen gehören jeweils zu einem der Werte $k = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{2}$ und $k = 1$. Ordnen Sie die angegebenen Werte von k jeweils einem der Graphen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung. 3

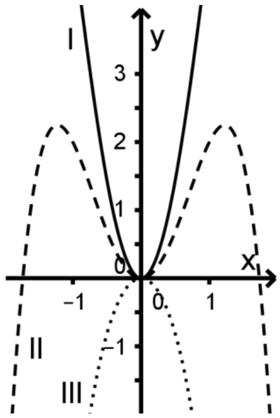


Abb. 1

f Deuten Sie für $k > 0$ das Integral $\int_0^{\sqrt{3k}} \left(9k^2 - f_k(x)\right)dx$ mithilfe einer geeigneten Skizze geometrisch. 3

2 Ein Trainingsgerät zur Schulung der Koordination besteht aus einem Unterbau und einem Standbrett (vgl. Abbildung 2). Das zwei Zentimeter dicke Standbrett schließt seitlich ohne Überstand mit dem Unterbau ab.

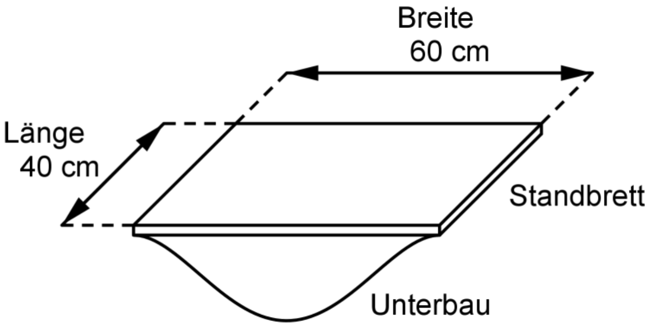


Abb. 2

Das Trainingsgerät hat auf seiner gesamten Länge den gleichen Querschnitt. In diesem Querschnitt wird die untere Profillinie des Unterbaus betrachtet.

Bei horizontal ausgerichtetem Standbrett soll die Profillinie durch eine Funktion modellhaft beschrieben werden. Das Modell geht von einem horizontalen Untergrund aus, der im Querschnitt durch die x-Achse des Koordinatensystems dargestellt wird; eine Längeneinheit im Koordinatensystem soll einem Dezimeter in der Realität entsprechen.

Zunächst wird die Profillinie für $-3 \le x \le 3$ durch die in IR definierte Funktion p mit $p(x) = -\frac{1}{48} \cdot \left(x^4 - 18x^2\right)$ beschrieben. Abbildung 3 zeigt den Graphen von p.

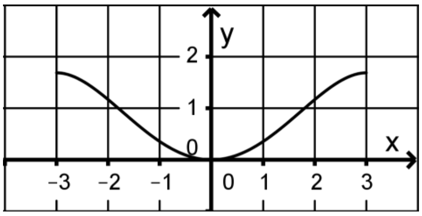


Abb. 3

a Der Graph von p geht durch eine Streckung aus einem der Graphen von f_k aus Aufgabe 1 hervor. Geben Sie den passenden Wert von k an und beschreiben Sie die Streckung. 2

b Begründen Sie, dass der Graph von p im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt hat und genau zwei Hochpunkte besitzt, die in ihren y-Koordinaten übereinstimmen. 3

c Bestimmen Sie die Höhe des Trainingsgeräts in Zentimetern. 3

d Der Unterbau und das Standbrett sind ohne Hohlraum aus Holz gefertigt. Ein Kubikzentimeter des Holzes hat eine Masse von 0,5 Gramm. Berechnen Sie die Masse des Trainingsgeräts in Kilogramm. 7

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $\left(1 \mid p(1)\right)$ und $\left(3 \mid p(3)\right)$.

e Weisen Sie nach, dass g die Tangente an den Graphen von p im Punkt $\left(1 \mid p(1)\right)$ ist. 3

f Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels von g. 2

g Der Steigungswinkel von g hat für das Trainingsgerät hinsichtlich dessen Bewegungsfreiheit eine besondere Bedeutung. Beschreiben Sie diese Bedeutung. 2

Zur Beschreibung der Profillinie des Unterbaus soll nun eine Funktion q mit $q(x) = a - c \cdot e^{-x^2}$, $a, c \in \mathrm{IR}^+$ und $x \in [-3;3]$ verwendet werden.

h Der Graph von q soll durch den Koordinatenursprung verlaufen. Die y-Koordinaten der beiden Randpunkte des Graphen von q sollen mit den y-Koordinaten der Randpunkte des Graphen von p übereinstimmen. Ermitteln Sie die Werte von a und c. 3

i Begründen Sie, dass die Werte von a und c nicht so gewählt werden können, dass der Graph von q zu seinen Randpunkten hin parallel zur x-Achse ausläuft. 3

Erwartungshorizont

1 a $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 \cdot \left(x^2 - 6k\right) = 0$

Damit hat f_k für $k \le 0$ genau eine Nullstelle, für $k > 0$ genau drei Nullstellen.

b Der Term von f_k enthält nur Potenzen von x mit geradem Exponenten.

Ist $k \le 0$, so gilt für alle $x \in \mathrm{IR}$: $-x^4 \le 0$, $6kx^2 \le 0$, d. h. $f_k(x) \le 0$.

c Für $k > 0$ gilt:

$$f_k'(x) = -4x^3 + 12kx = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = -\sqrt{3k} \lor x = \sqrt{3k}$$
$$f_k''(x) = -12x^2 + 12k,\ f_k''(0) = 12k > 0,\ f_k''\left(-\sqrt{3k}\right) = f_k''\left(\sqrt{3k}\right) = -24k < 0$$

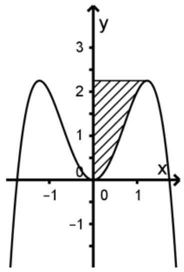
$f_k\left(-\sqrt{3k}\right) = f_k\left(\sqrt{3k}\right) = 9k^2$

Koordinaten der Hochpunkte: $\left(-\sqrt{3k}\,|\,9k^2\right)$, $\left(\sqrt{3k}\,|\,9k^2\right)$

d Für $k > 0$ gilt: $9k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$
Damit haben G_k und die Gerade für $0 < k < \frac{2}{3}$ keine, für $k = \frac{2}{3}$ genau zwei und für $k > \frac{2}{3}$ genau vier gemeinsame Punkte.

e Da die Graphen I und II teilweise oberhalb der x-Achse verlaufen, gehört $k = -\frac{1}{2}$ zum Graphen III. Da der Graph II keinen Hochpunkt mit y-Koordinate 9 hat, gehört $k = 1$ zum Graphen I, folglich $k = \frac{1}{2}$ zum Graphen II.

f



Der Wert des Integrals ist der Inhalt der Fläche, die G_k mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $y = 9k^2$ im I. Quadranten einschließt.

2 a $k = 3$
Streckung mit dem Faktor $\frac{1}{48}$ in y-Richtung

b G_3 hat im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt und besitzt genau zwei Hochpunkte, die in ihren y-Koordinaten übereinstimmen. Da der Graph von p durch eine Streckung mit positivem Faktor in y-Richtung aus G_3 hervorgeht, gilt dies auch für den Graphen von p.

c $p(3) = \frac{27}{16}$, $\frac{27}{16} \cdot 10\,\text{cm} + 2\,\text{cm} \approx 18{,}9\,\text{cm}$

d Volumen des Unterbaus:

$$2 \cdot \int_0^3 \left(p(3) - p(x)\right)dx = 2 \cdot \left[\frac{27}{16}x + \frac{1}{240}x^5 - \frac{1}{8}x^3\right]_0^3 = 5{,}4$$

$$5{,}4 \cdot (10\,\text{cm})^2 \cdot 40\,\text{cm} = 21600\,\text{cm}^3$$

Volumen des Standbretts: $60\,\text{cm} \cdot 40\,\text{cm} \cdot 2\,\text{cm} = 4800\,\text{cm}^3$

Masse des Trainingsgeräts: $26400\,\text{cm}^3 \cdot 0{,}5\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 13{,}2\,\text{kg}$

e $p(1) = \frac{17}{48}$

$$\frac{\frac{27}{16} - \frac{17}{48}}{2} = \frac{2}{3} = p'(1)$$

f $\tan\alpha = \frac{2}{3}$, d. h. $\alpha \approx 33{,}7°$

g Wird das Trainingsgerät in Querrichtung um die Größe des Steigungswinkels geneigt, so hat sein Rand Kontakt zum Boden.

h Mit $q(0) = 0 \Leftrightarrow a = c$ und $q(3) = a - c \cdot e^{-9} = \frac{27}{16}$ ergibt sich:

$$a \cdot \left(1 - e^{-9}\right) = \frac{27}{16} \Leftrightarrow a = \frac{27}{16 \cdot \left(1 - e^{-9}\right)}$$

i $q'(x) = 2cxe^{-x^2} \neq 0$ für $x = -3$ und $x = 3$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4	X			X		II	I			I			X	
b	3			X	X		I				I	I	X		
c	5	X			X		II				II			X	
d	4	X		X	X		II	III			II				X
e	3				X		II	II		II				X	
f	3		X	X	X		II	II		II				X	
2 a	2			X	X		II			II		I		X	
b	3				X		I				I	I	X		
c	3		X	X	X				I		I		X		
d	7		X	X	X			II	III		III				X
e	3			X	X		II	I			II			X	
f	2		X		X						I		X		
g	2			X	X		II		III			II			X
h	3	X			X			II			III	II			X
i	3	X	X	X	X		II	II			II			X	

2018 – WTR 1

1 Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_f schneidet die x-Achse bei $x=0$, $x=5$ und $x=10$ und verläuft durch den Punkt $(1|2)$.

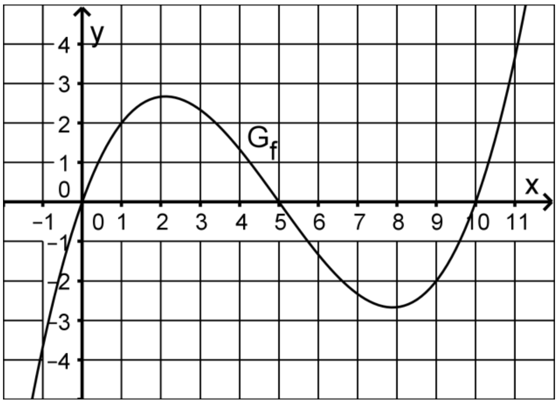


Abb. 1

a Ermitteln Sie einen Funktionsterm von f. 4

(zur Kontrolle: $f(x)=\frac{1}{18}\cdot(x^3-15x^2+50x)$)

b Zeigen Sie, dass G_f im Punkt $W(5|0)$ einen Wendepunkt besitzt, und ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W. 6

c G_f geht aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{18}\cdot\left(x^3-25x\right)$ durch eine Verschiebung in positive x-Richtung hervor. Geben Sie an, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts ist. 4

Im Folgenden wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_1 mit $F_1(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ betrachtet.

d F_1 hat für $0 \le x \le 10$ zwei ganzzahlige Nullstellen. Geben Sie diese an und begründen Sie Ihre Angabe. 3

e Begründen Sie mithilfe von Abbildung 1, dass F_1 mindestens eine weitere positive Nullstelle hat. 2

f Begründen Sie, dass F_1 höchstens vier Nullstellen hat. 2

Für $0 \le x \le 5$ gilt, dass der Graph von f und der Graph einer trigonometrischen Funktion h

- die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen;
- beide nicht unterhalb der x-Achse verlaufen;
- jeweils mit der x-Achse eine Fläche des Inhalts $\frac{625}{72}$ einschließen.

g Bestimmen Sie einen Term einer solchen Funktion h. 6

h Begründen Sie, dass die Graphen von f und h für $0 < x < 5$ mindestens einen gemeinsamen Punkt haben. 3

2 Die Kosten, die einem Unternehmen bei der Herstellung einer Flüssigkeit entstehen, können durch die Funktion $K: x \mapsto x^3-12x^2+50x+20$ mit $x \in [0;9]$ beschrieben werden. Dabei gibt $K(x)$ die Kosten in 1000 Euro an, die bei der Produktion von x Kubikmetern der Flüssigkeit insgesamt entstehen. Abbildung 2 zeigt den Graphen von K.

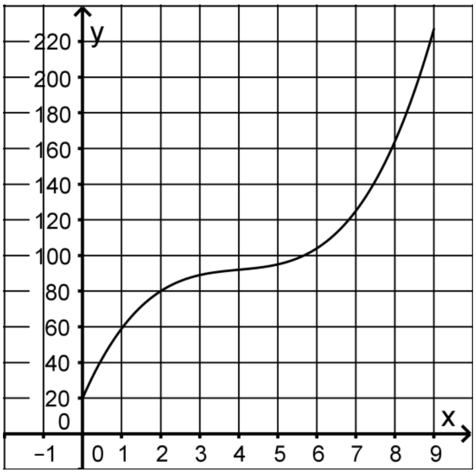


Abb. 2

a Geben Sie mithilfe von Abbildung 2 die Produktionsmenge an, bei der die Kosten 125 000 Euro betragen. 1

b Geben Sie das Monotonieverhalten von K an und deuten Sie Ihre Angabe im Sachzusammenhang. 2

Die Funktion E mit $E(x) = 23x$ gibt für $0 \leq x \leq 9$ den Erlös (in 1000 Euro) an, den das Unternehmen beim Verkauf von x Kubikmetern der Flüssigkeit erzielt. Für die sogenannte Gewinnfunktion G gilt $G(x) = E(x) - K(x)$. Positive Werte von G werden als Gewinn bezeichnet, negative als Verlust.

c Zeigen Sie, dass das Unternehmen keinen Gewinn erzielt, wenn vier Kubikmeter der Flüssigkeit verkauft werden. 2

d Zeichnen Sie den Graphen von E in Abbildung 2 ein. Bestimmen Sie mithilfe der so entstehenden Darstellung den Bereich, in dem die verkaufte Menge der Flüssigkeit liegen muss, damit das Unternehmen einen Gewinn erzielt. 4

e Berechnen Sie, welche Menge der Flüssigkeit verkauft werden muss, damit das Unternehmen den größten Gewinn erzielt. 5

f Für jeden Wert von b mit $b \in \mathbb{R}^+$ ist die Funktion $K_b : x \mapsto x^3 - bx^2 + 50x + 20$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass K_b für $b < \sqrt{150}$ streng monoton wachsend ist. 6

<u>Erwartungshorizont</u>

1 a $f(x) = a \cdot x \cdot (x-5) \cdot (x-10)$; $f(1) = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{18}$

b $f'(x) = \frac{1}{18} \cdot (3x^2 - 30x + 50)$, $f''(x) = \frac{1}{18} \cdot (6x - 30)$, $f'''(x) = \frac{1}{3}$

$f''(5) = 0$, $f'''(5) \neq 0$

$f'(5) = -\frac{25}{18}$, $0 = -\frac{25}{18} \cdot 5 + t \Leftrightarrow t = \frac{125}{18}$, d. h. $y = -\frac{25}{18}x + \frac{125}{18}$

c Der Graph von g muss um 5 in positive x-Richtung verschoben werden.

Da der Term von g nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten enthält, ist der Graph von g symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, G_f also symmetrisch bezüglich des Punkts $W(5|0)$.

d $x = 1$: Die Integrationsgrenzen stimmen überein.
$x = 9$: Betrachtet man die Flächenstücke, die G_f im Integrationsbereich mit der x-Achse einschließt, so ist aufgrund der Symmetrie des Graphen der Inhalt des

oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücks ebenso groß wie der Inhalt des unterhalb liegenden Flächenstücks.

e Betrachtet man die Flächenstücke, die G_f im Integrationsbereich mit der x-Achse einschließt, so sind für ein $x > 10$ die Inhalte der oberhalb der x-Achse liegenden Flächenstücke zusammen ebenso groß wie der Inhalt des unterhalb liegenden Flächenstücks.

f Die Funktion F_1 ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und hat als solche höchstens vier Nullstellen.

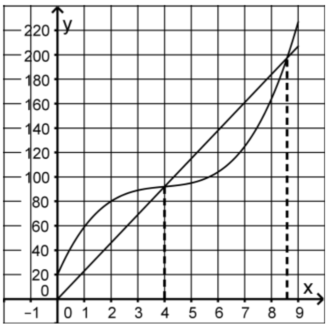
g $h(x) = a \cdot \sin(bx)$
h hat im betrachteten Bereich die gleichen Nullstellen wie f, wenn $b = \frac{\pi}{5}$ ist.
$\int_0^5 h(x)\,dx = a \cdot \left[-\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)\right]_0^5 = \frac{625}{72} \Leftrightarrow a = \frac{125}{144}\pi$

h Hätten die Graphen von f und h für $0 < x < 5$ keinen gemeinsamen Punkt, dann würde der Graph von f in diesem Bereich entweder vollständig oberhalb oder vollständig unterhalb des Graphen von h verlaufen. Dies ist jedoch nicht möglich, da die beiden Graphen für $0 \le x \le 5$ mit der x-Achse Flächen gleichen Inhalts einschließen.

2 a Die Produktionsmenge beträgt etwa $7\,m^3$.

b K ist streng monoton wachsend, d. h. mit zunehmender Produktionsmenge nehmen die Kosten zu.

c $E(4) - K(4) = 92 - 92 = 0$

d 

Das Unternehmen erzielt nur für $4 < x < x_s$ mit $x_s \approx 8{,}6$ einen Gewinn.

e $G(x) = -x^3 + 12x^2 - 27x - 20$, $G'(x) = -3x^2 + 24x - 27$
Für $4 < x < x_s$ mit $x_s \approx 8{,}6$ gilt: $G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{7} \approx 6{,}6$
Es müssen etwa 6,6 Kubikmeter verkauft werden.

f $K_b'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2bx + 50 = 0$
Für $b \in IR^+$ gilt für die Diskriminante: $4b^2 - 600 < 0 \Leftrightarrow b < \sqrt{150}$
Damit hat K_b' für $b < \sqrt{150}$ keine Nullstellen. Da $K_b'(0) > 0$ gilt, ist K_b für diese Werte von b streng monoton wachsend.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4	X			X		II				II			X	
b	6	X	X	X	X			I			I		X		
c	4		X	X	X		II	II		II				X	

d	3		X	X	X		II				I	II		X	
e	2		X	X	X		II			II		II		X	
f	2				X		II				II			X	
g	6	X	X	X	X		II	III			III				X
h	3			X	X		III	III				II			X
2 a	1	X			X				I	I			X		
b	2				X				I	I		I	X		
c	2				X				I		I		X		
d	4	X		X	X				II	II		II		X	
e	5	X			X				II		II			X	
f	6	X			X		III	II			III				X

2018 – WTR 2

1 Abbildung 1 zeigt schematisch drei Bahnen, auf denen sich eine Kugel beim Kugelstoßen bewegen kann. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 m in der Realität; die x-Achse beschreibt den horizontal verlaufenden Boden. Die Kugel soll als punktförmig angenommen werden.

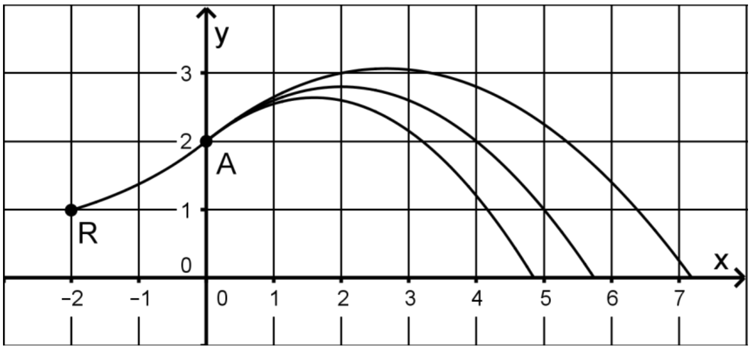


Abb. 1

Die Kugel wird aus der Ruhelage (R) beschleunigt, bis sie im Abstoßpunkt (A) die Hand der Athletin verlässt. Die anschließende Flugkurve der Kugel ist abhängig von ihrer Geschwindigkeit beim Abstoßen. Damit verändert sich insbesondere die Stoßweite, d. h. der horizontale Abstand zwischen Abstoßpunkt und Auftreffpunkt auf dem Boden.

Die Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt kann modellhaft durch die Funktion f mit $f(x) = 0{,}4 + 1{,}6 \cdot e^{0{,}5x}$ und $x \in [-2; 0]$ beschrieben werden.

a Berechnen Sie die Länge der Bahn der Kugel von der Ruhelage bis zum Abstoßpunkt näherungsweise als Länge der Strecke zwischen diesen beiden Punkten. 2

b Berechnen Sie den horizontalen Abstand der Kugel von der Ruhelage, wenn sie sich in der Hand der Athletin 1,50 m über dem Boden befindet. 4

c Während eines Stoßes wurde die Höhe der Kugel über dem Boden an fünf Stellen gemessen. Die fünf Stellen werden im Modell durch die x-Werte x_1 bis x_5 dargestellt, die gemessenen Höhen werden mit h_1 bis h_5 bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage: 3

Wenn der Wert des Terms $\left| \sum_{i=1}^{5} \left(h_i - f(x_i) \right) \right|$ *klein ist, dann werden die gemessenen Höhen durch die Werte, die das Modell liefert, gut beschrieben.*

Nach dem Abstoßen der Kugel lässt sich jede mögliche Flugkurve mithilfe einer der in IR definierten Funktionen p_a mit $p_a(x) = -ax^2 + bx + 2$ und $a \in \mathbb{R}^+$ beschreiben. Alle möglichen Bahnen der Kugel weisen im Abstoßpunkt keinen Knick auf.

d Ermitteln Sie den Wert von b. 4

(zur Kontrolle: $b = 0{,}8$)

e Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph von p_a durch den Punkt $(3 \mid 3{,}5)$ verläuft. 2

f Bei der Flugkurve zu $a = 0{,}1$ beträgt die Stoßweite 10 m. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Kugel auf den Boden auftrifft. 3

g Zeigen Sie, dass $\left(\frac{0{,}4}{a} \mid 2 + \frac{0{,}16}{a} \right)$ Hochpunkt des Graphen von p_a ist. 4

h Es gibt eine Gerade, auf der die Hochpunkte aller Graphen von p_a liegen. Berechnen Sie die Steigung dieser Gerade. 3

Der Zusammenhang zwischen den Werten von a und den Stoßweiten s mit $s > 0$ lässt sich durch die Gleichung $a = \frac{0,8}{s} + \frac{2}{s^2}$ darstellen.

i Leiten Sie diese Gleichung her. 3

j Bei einem Stoß beträgt die Stoßweite 20 m. Berechnen Sie die Höhe der Flugkurve. 4

k Abbildung 2 stellt den Zusammenhang zwischen den Werten von a und den Stoßweiten s graphisch dar. Beurteilen Sie die folgende Aussage: 3

Unterscheiden sich die Weiten zweier Stöße um 2 m, so ist der zur größeren Weite gehörende Wert von a halb so groß wie der zur kleineren Weite gehörende.

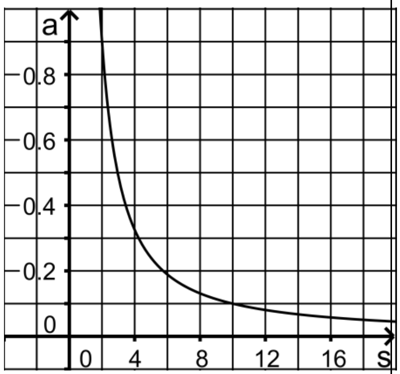


Abb. 2

l Zeichnen Sie in Abbildung 2 die beiden Parallelen zur s-Achse ein, die durch die Punkte des Graphen mit den s-Koordinaten 2 bzw. 10 verlaufen. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph mit der a-Achse und den beiden eingezeichneten Parallelen einschließt. 7

2 Auf dem Boden eines Behälters liegt eine Kugel. Abbildung 3 zeigt – um 90° gedreht – einen Querschnitt dieses Behälters und der Kugel. Im verwendeten Koordinatensystem entspricht eine Längeneinheit 1 cm, d. h. die Kugel hat einen Durchmesser von 10 cm.

Die Seitenwand des Behälters lässt sich modellhaft durch Rotation des Graphen der Funktion q mit $q(x) = \sqrt{5x + 40}$ und $x \in [0; 13]$ um die x-Achse beschreiben.

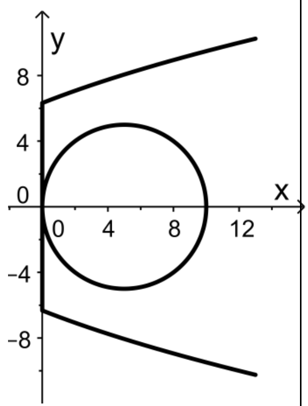


Abb. 3

Der Behälter ist zum großen Teil mit Wasser gefüllt. Die Kugel befindet sich vollständig unterhalb der Wasseroberfläche.

a Zeigen Sie, dass sich im Behälter mehr als $1500\,\text{cm}^3$ Wasser befinden. 5

b In den Behälter werden zusätzliche $300\,\text{cm}^3$ Wasser gefüllt. Die Füllhöhe über dem Boden steigt dadurch um 1 cm. Stellen Sie eine Gleichung auf, mit der sich die Füllhöhe vor dem Einfüllen der $300\,\text{cm}^3$ Wasser berechnen lässt. 3

Erwartungshorizont

1 **a** $\sqrt{1^2 + 2^2} \approx 2{,}24$

Die Länge der Bahn beträgt etwa 2,24 m.

b $f(x) = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{1{,}1}{1{,}6}\right) \approx -0{,}75$, d. h. der Abstand beträgt etwa 1,25 m.

c Die Aussage ist falsch.
Begründung: Werte von $h_i - f(x_i)$, deren Beträge groß sind, können sich zumindest teilweise gegenseitig aufheben, wenn sie unterschiedliche Vorzeichen haben.

d Mit $p'_a(x) = -2ax + b$ und $f'(x) = 0{,}8 \cdot e^{0{,}5x}$ ergibt sich: $p'_a(0) = f'(0) \Leftrightarrow b = 0{,}8$

e $-a \cdot 3^2 + 0{,}8 \cdot 3 + 2 = 3{,}5 \Leftrightarrow a = 0{,}1$

f $\tan\varphi = p'_{0,1}(10) = -1{,}2$, d. h. $\varphi \approx -50°$
Die Kugel trifft unter einem Winkel mit einer Größe von etwa 50° auf.

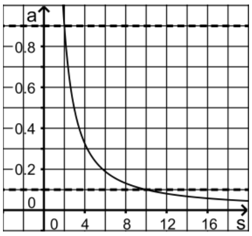
g Der Graph von p_a ist eine nach unten geöffnete Parabel und es gilt:
$p'_a\left(\frac{0{,}4}{a}\right) = -2 \cdot a \cdot \frac{0{,}4}{a} + 0{,}8 = 0$, $p_a\left(\frac{0{,}4}{a}\right) = -a \cdot \left(\frac{0{,}4}{a}\right)^2 + 0{,}8 \cdot \frac{0{,}4}{a} + 2 = 2 + \frac{0{,}16}{a}$

h Für $a = 1$ ergibt sich der Hochpunkt $(0{,}4 \,|\, 2{,}16)$, für $a = 2$ $(0{,}2 \,|\, 2{,}08)$.
Steigung der Gerade: $\frac{2{,}16 - 2{,}08}{0{,}4 - 0{,}2} = 0{,}4$

i $p_a(s) = 0 \Leftrightarrow a \cdot s^2 = 0{,}8s + 2 \Leftrightarrow a = \frac{0{,}8}{s} + \frac{2}{s^2}$

j Für $s = 20$ ist $a = \frac{0{,}8}{20} + \frac{2}{20^2} = 0{,}045$
Damit: $2 + \frac{0{,}16}{0{,}045} \approx 5{,}6$
Die Höhe der Flugkurve beträgt etwa 5,6 m.

k Die Aussage ist falsch.
Für $s = 10$ ist $a = 0{,}1$, für $s = 12$ weicht der Wert von a mit etwa 0,08 deutlich von der Hälfte von 0,1 ab.

l 

Für $s = 2$ ergibt sich $a = 0{,}9$, für $s = 10$ ist $a = 0{,}1$.
$$2 \cdot 0{,}9 + \int_2^{10} \left(\frac{0{,}8}{s} + \frac{2}{s^2}\right) ds - 10 \cdot 0{,}1 = 0{,}8 + \left[0{,}8 \cdot \ln s - \frac{2}{s}\right]_2^{10} =$$
$$= 0{,}8 + \left(0{,}8 \cdot \ln 10 - \frac{2}{10} - 0{,}8 \cdot \ln 2 + \frac{2}{2}\right) \approx 2{,}9$$

2 a $$\pi \cdot \int_0^{10} (q(x))^2 \, dx - \frac{4}{3} r^3 \pi = \pi \cdot \left[\frac{5}{2} x^2 + 40x\right]_0^{10} - \frac{500}{3}\pi \approx 1518$$

b Bezeichnet man die Füllhöhe vor dem Einfüllen der $300\,\text{cm}^3$ Wasser mit t, so gilt:
$$\pi \cdot \int_t^{t+1} (q(x))^2 \, dx = 300$$

<u>Standardbezug</u>

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2		X	X	X				I	I	I		X		
b	4	X	X		X				I		I		X		
c	3		X	X	X	X	III		III	III					X
d	4	X		X	X		I		II		II			X	
e	2	X			X						I	I	X		
f	3	X	X		X				I		I	I	X		

g	4	X			X						II			X	
h	3		X	X	X			III	I		II				X
i	3	X			X			II	I		II			X	
j	4				X			II	I		I			X	
k	3				X		II			II		II		X	
l	7		X	X	X			III		II	III				X
2 a	5		X	X	X			II	II		II			X	
b	3		X	X	X		III		II		II				X

2019 – WTR 1

1 Der Graph einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ hat den Tiefpunkt $(0|0)$ und den Wendepunkt $\left(-\frac{1}{2}\,|\,\frac{5}{4}\right)$.

a Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g. 6

(zur Kontrolle: $g(x)=\frac{5}{2}x^2\cdot(2x+3)$)

b Zeichnen Sie den Graphen von g für $-1{,}5 \le x \le 0{,}5$ in ein Koordinatensystem ein. 2

c Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g in dessen Wendepunkt. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet. 3

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x)=5x^2\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.

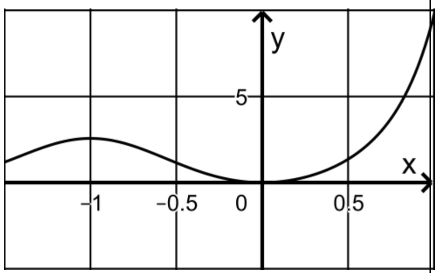


Abb. 1

d Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to -\infty$ an und beschreiben Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt. 2

e Zeigen Sie, dass $h'(x)=10x\cdot\left(1+x^3\right)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h ist. 3

f Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h. 3

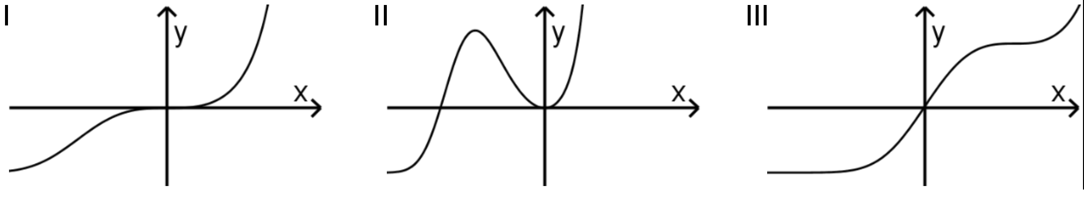
g Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1 \le x \le 0$. 3

h Es gilt $\left(h(1)-g(1)\right)\cdot\left(h(2)-g(2)\right)<0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1<x<2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

i Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung 1 die folgende Aussage: 3

Für $-1{,}5 \le x \le 1$ ändert sich beim Graphen jeder Stammfunktion von h genau einmal das Krümmungsverhalten.

j Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion H mit $H(x)=\int_0^x h(t)\,dt$ darstellt. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 3



2 Der Luftdruck wird in Abhängigkeit von der Höhe über dem Meeresspiegel modellhaft mithilfe der Funktion p mit $p(x) = 1000e^{-\frac{x}{8}}$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist x die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern und $p(x)$ der Luftdruck in Hektopascal (hPa). Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von p.

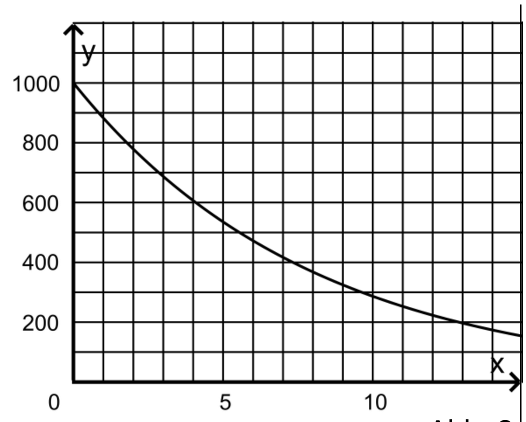


Abb. 2

a Bestimmen Sie grafisch die Höhe, in der der Luftdruck 650 hPa beträgt. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 2. 2

b Zeigen Sie, dass eine Verringerung des Luftdrucks um die Hälfte auf eine Höhenänderung zurückzuführen ist, die unabhängig von der Ausgangshöhe ist. Geben Sie diese Höhenänderung an. 3

c Bestimmen Sie die lokale Änderungsrate des Luftdrucks in einer Höhe von 1,785 km. 3

Laut einer Faustregel sinkt der Luftdruck um 1 hPa, wenn die Höhe um 10 m zunimmt.

d Eine Gruppe von Bergsteigern misst in einer Höhe von 1785 m einen Luftdruck von 800 hPa. Bestimmen Sie die Höhe, in der sich die Bergsteiger einige Zeit später befinden, wenn die Faustregel dafür 2785 m liefert. 4

e Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion, die ausgehend von einem Luftdruck von 800 hPa in einer Höhe von 1785 m für jeden anderen Luftdruck (in hPa) die der Faustregel entsprechende Höhe (in km) liefert. 3

f Geben Sie die Wertemenge des Terms $-8 \cdot \ln\frac{u}{1000}$ für $0 < u \leq 1000$ an. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Terms im Sachzusammenhang. 4

<u>Erwartungshorizont</u>

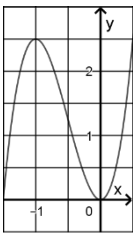
1 a Der gesuchte Term hat die Form $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Da $(0|0)$ Tiefpunkt ist, gilt $c = d = 0$.

Damit: $g'(x) = 3ax^2 + 2bx$, $g''(x) = 6ax + 2b$

Mit $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 2b = a + 10$ ergibt sich:

$g''\left(-\frac{1}{2}\right) = -3a + a + 10 = 0 \Leftrightarrow a = 5$, d. h. $b = \frac{15}{2}$

b



c $\tan\alpha = g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4}$, d. h. $\alpha \approx -75°$

Die Größe des Winkels beträgt etwa 75°.

d $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=0$, d. h. der Graph von h nähert sich für $x\to-\infty$ der x-Achse beliebig nahe an.

e $h'(x)=10x\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}+5x^2\cdot 2x^2\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}=10x\cdot\left(1+x^3\right)\cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$

f $h'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=0$, $h(-1)=5e^{-\frac{2}{3}}$, $h(0)=0$

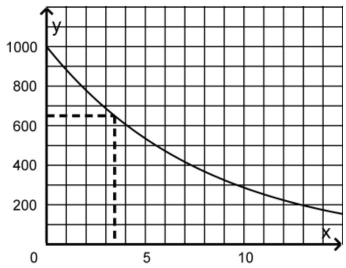
Damit: $\left(-1 \,|\, 5e^{-\frac{2}{3}}\right)$, $(0\,|\,0)$

g $\frac{g(0)-g(-1)-(h(0)-h(-1))}{h(0)-h(-1)}\approx-0{,}026$, d. h. die Abweichung beträgt etwa 2,6 %.

h Da das Produkt negativ ist, haben die beiden Differenzen unterschiedliche Vorzeichen. Damit haben die Graphen von g und h im angegebenen Bereich mindestens einen Schnittpunkt.

i Die Aussage ist falsch.
Begründung: Das Krümmungsverhalten des Graphen einer Stammfunktion von h ändert sich für einen Wert von x, wenn der Graph von h dort einen Extrempunkt hat. Der Graph von h hat für $-1{,}5\le x\le 1$ mehr als einen Extrempunkt.

j Es gilt $H'(x)=h(x)$. Da $h(x)\ge 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ sowie $h(0)=0$, ist der Graph von H monoton steigend und dessen Steigung für $x=0$ null. Dies gilt nur für den Graphen I.

2 a 

Die Höhe, in der der Luftdruck 650 hPa beträgt, ist etwa 3,4 km.

b $p(x+d)=\frac{1}{2}\cdot p(x) \Leftrightarrow 1000e^{-\frac{x+d}{8}}=500e^{-\frac{x}{8}} \Leftrightarrow e^{-\frac{d}{8}}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow d=8\cdot\ln 2$

Die Höhenänderung beträgt etwa 5,5 km.

c $p'(x)=-125e^{-\frac{x}{8}}$

$p'(1{,}785)=-125e^{-\frac{1{,}785}{8}}\approx-100$, d. h. die Änderungsrate beträgt etwa $-100\,\frac{\text{hPa}}{\text{km}}$.

d $1000e^{-\frac{x}{8}}=p(1{,}785)-100$ liefert $x=-8\cdot\ln\frac{p(1{,}785)-100}{1000}\approx 2{,}85$.

Die Bergsteiger befinden sich in einer Höhe von etwa 2850 m.

e Die Gleichung hat die Form $y=-0{,}01x+n$. Da der Punkt $(800\,|\,1{,}785)$ auf dem Graphen der Funktion liegt, ergibt sich: $1{,}785=-0{,}01\cdot 800+n \Leftrightarrow n=9{,}785$

f Wertemenge: $\mathbb{R}_0^+$
Mit dem Term kann im Modell für jeden Luftdruck in Hektopascal die zugehörige Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern berechnet werden.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	6	X			X		II	II			II			X	
b	2				X					I			X		
c	3	X	X		X			I			II	I		X	
d	2	X		X	X					I	I	I	X		
e	3				X						II			X	
f	3	X			X						I		X		
g	3		X		X						II	I		X	
h	3		X	X	X		III	III				II			X
i	3			X	X		III			II		II			X
j	3			X	X		III	III		II					X
2 a	2		X		X				I	I			X		
b	3	X			X			III	II		II				X
c	3		X		X				I		I		X		
d	4	X			X			III	II		II				X
e	3	X	X		X				II		II	II		X	
f	4	X			X		II		II		I	I		X	

2019 – WTR 2

1 Für jeden Wert von $k \in \mathbb{R}^+$ ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_k : x \mapsto 8k \cdot (kx-1)^2 \cdot (kx+1)^2$ festgelegt. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte, die G_k mit den Koordinatenachsen gemeinsam hat. 3

b Skalieren Sie in der Abbildung 1 die beiden Achsen so, dass die gezeigte Kurve den Graphen $G_{\frac{1}{4}}$ darstellt. 2

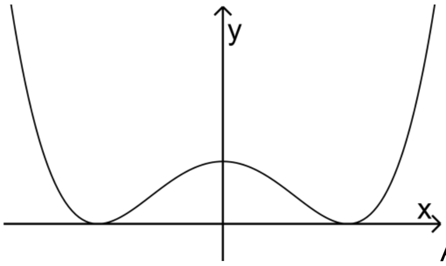


Abb. 1

c Beschreiben Sie, wie der Graph G_{2k} aus G_k hervorgeht. 2

d Begründen Sie, dass $f_k(x) = 8k \cdot \left(k^2x^2 - 1\right)^2$ gilt, und zeigen Sie, dass G_k symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. 3

e Für einen Wert von k gibt es einen Punkt $(x_1 \mid f_k(x_1))$ mit $x_1 > 0$, für den die Gleichung $\frac{f_k(x_1) - 0}{x_1 - 0} = -\frac{1}{f_k'(x_1)}$ gilt. Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung dieser Gleichung. 3

G_k schließt im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück ein. Die Abbildung 2 zeigt dieses Flächenstück (grau markiert) sowie das Rechteck mit den Eckpunkten $(0 \mid f_k(0))$ und $\left(\frac{1}{k} \mid 0\right)$, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

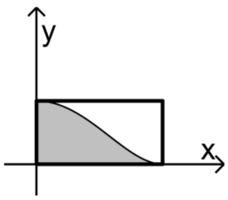


Abb. 2

f Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks. 4

Bei Rotation des Rechtecks um die x-Achse entsteht ein Körper, ebenso bei Rotation um die y-Achse.

g Skizzieren Sie einen der beiden Körper und beschriften Sie die Skizze mit den Maßen des Körpers. 2

h Ermitteln Sie denjenigen Wert von k, für den die beiden Körper das gleiche Volumen haben. 3

i Bei Rotation des grau markierten Flächenstücks um die y-Achse entsteht ein weiterer Körper. Begründen Sie, dass das Volumen dieses Körpers mit zunehmendem Wert von k beliebig klein wird. 5

2 Im Folgenden werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ und $g : x \mapsto (x-2)^2 \cdot e^x$ betrachtet.

a Die Funktion f ist eine Funktion der Schar aus Aufgabe 1. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von k. 2

b Zwei Extrempunkte des Graphen von f liegen auf dem Graphen von g. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte. 4

c Die Abbildung 3 zeigt die Graphen von f und g für $0 \le x \le 2$. Ordnen Sie jeden der Graphen I und II der passenden Funktion zu und begründen Sie Ihre Zuordnung. 2

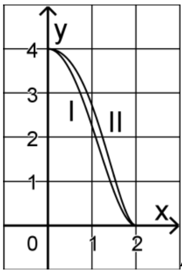


Abb. 3

d Betrachtet wird die Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(p\,|\,g(p))$ mit $0 < p < 2$. Ermitteln Sie rechnerisch denjenigen Wert von p, für den diese Tangente die x-Achse im Punkt $Q(2\,|\,0)$ schneidet. 6

3 Der Term einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h hat die Form $h(x) = a \cdot \cos(bx) + c$ mit $a, c \in \mathbb{R}$ und $b \in [0,2]$. Der Graph von h weist im Bereich $-1 \le x \le 3$ genau zwei seiner Extrempunkte auf, den Hochpunkt $(0\,|\,4)$ und den Tiefpunkt $(2\,|\,0)$.

a Skizzieren Sie den Graphen von h für $-1 \le x \le 3$ in einem Koordinatensystem. 2

b Geben Sie die Werte von a und c an und ermitteln Sie den Wert von b. 4

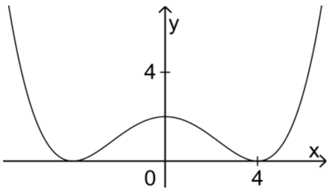
c Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-1}^{1} (h(x) - 2)\,dx = \int_{1}^{3} (2 - h(x))\,dx$ gilt. 3

Erwartungshorizont

1 a $f_k(0) = 8k$, $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{k} \vee x = \frac{1}{k}$

Damit: $\left(-\frac{1}{k}\,|\,0\right)$, $(0\,|\,8k)$, $\left(\frac{1}{k}\,|\,0\right)$

b



c G_{2k} geht aus G_k durch eine Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ und eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 hervor.

d $(kx-1)^2 \cdot (kx+1)^2 = ((kx-1)\cdot(kx+1))^2 = (k^2x^2-1)^2$

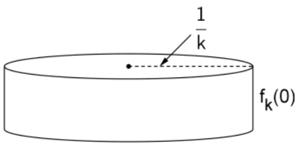
$f_k(-x) = 8k \cdot \left(k^2(-x)^2 - 1\right)^2 = 8k \cdot \left(k^2x^2-1\right)^2 = f_k(x)$

e Die Tangente an G_k im Punkt $(x_1\,|\,f_k(x_1))$ steht senkrecht zur Gerade durch diesen Punkt und den Koordinatenursprung.

f $\int_0^{\frac{1}{k}} f_k(x)\,dx = 8k \cdot \int_0^{\frac{1}{k}} \left(k^2x^2-1\right)^2 dx = 8k \cdot \int_0^{\frac{1}{k}} \left(k^4x^4 - 2k^2x^2 + 1\right) dx$

$= 8k \cdot \left[\frac{1}{5}k^4x^5 - \frac{2}{3}k^2x^3 + x\right]_0^{\frac{1}{k}} = \frac{64}{15}$

g



h $(8k)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{k} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8k \Leftrightarrow 8k = \frac{1}{k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{8}}$

i Für jeden Wert von k ist das Volumen des Körpers, der bei Rotation des grau markierten Flächenstücks um die y-Achse entsteht, kleiner als das Volumen des Zylinders, der bei Rotation des Rechtecks um die y-Achse entsteht. Für das Volumen dieses Zylinders gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot \pi \cdot 8k\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{8\pi}{k} = 0$$

2 a $8k = 4 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

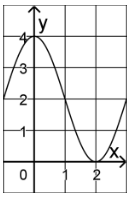
b $f'(x) = x^3 - 4x = x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 0 \vee x = 2$
Da $g(-2) = 16e^{-2} \neq f(-2)$, haben die beiden Punkte die Koordinaten $(0\,|\,4)$ bzw. $(2\,|\,0)$.

c I - f, II - g
Begründung: $f(1) = 2{,}25$

d Mit $g'(x) = 2 \cdot (x-2) \cdot e^x + (x-2)^2 \cdot e^x = (x-2) \cdot e^x \cdot x$, $g'(p) = p \cdot (p-2) \cdot e^p$ und

$g(p) = (p-2)^2 \cdot e^p$ ergibt sich: $\dfrac{-(p-2)^2 \cdot e^p}{2-p} = p \cdot (p-2) \cdot e^p \Leftrightarrow 1 = p$

3 a



b $a = c = 2$
Da der Graph von h im Bereich $-1 \leq x \leq 3$ nur einen seiner Tiefpunkte aufweist, gilt für $b \in [0,2]$: $0 = 2 \cdot \cos(b \cdot 2) + 2 \Leftrightarrow \cos(b \cdot 2) = -1 \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{2}$

c Der Graph von h ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(1|\,2)$. Deshalb stimmen die Inhalte der beiden Flächenstücke, die der Graph von h für $-1 \leq x \leq 1$ bzw. $1 \leq x \leq 3$ mit der Gerade mit der Gleichung $y = 2$ einschließt, überein.

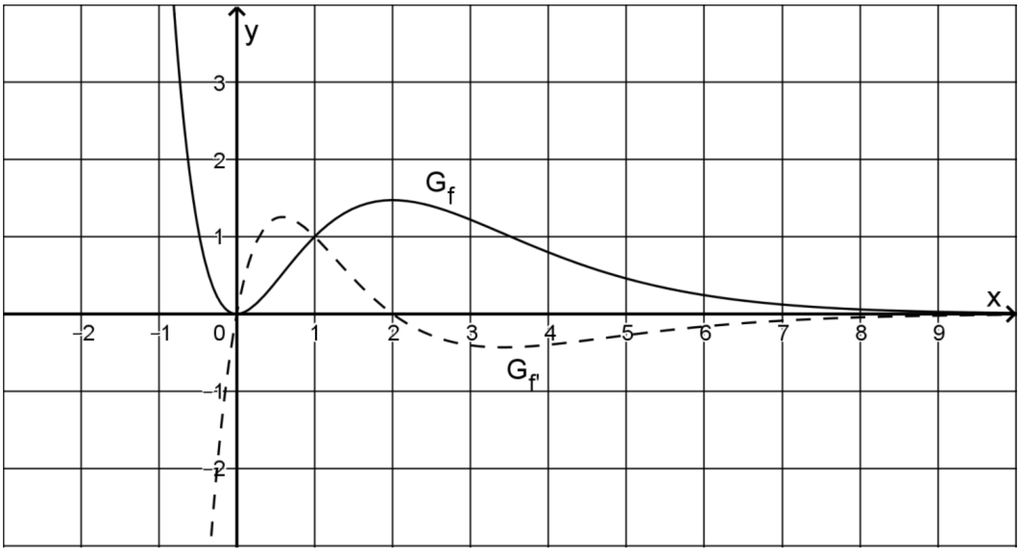
<u>Standardbezug</u>

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	X			X						I		X		
b	2		X		X			I		II	I			X	
c	2			X	X		II			II		II		X	
d	3			X	X					I	I		X		
e	3		X	X	X		III				II	II			X
f	4		X		X						II			X	
g	2		X	X	X					I	I	I	X		
h	3	X	X	X	X			II			II			X	
i	5	X	X	X	X		III	III			II				X
2 a	2	X			X			II		II	I			X	

b	4	X		X	X		II	II			II			X	
c	2			X	X		I			I	I		X		
d	6	X	X	X	X			III			II				X
3 a	2				X		I			II		I		X	
b	4	X			X		II	II			II			X	
c	3		X	X	X		II			II		II		X	

2019 – WTR 3

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto x^2 \cdot e^{1-x}$ sowie den Graphen $G_{f'}$ der zugehörigen ersten Ableitungsfunktion f'.



1 a Beschreiben Sie die Eigenschaft von | 4

- $G_{f'}$, aus der sich folgern lässt, dass G_f bei $x = 0$ einen Tiefpunkt hat.
- G_f, aus der sich folgern lässt, dass $G_{f'}$ bei $x = 0{,}6$ einen Hochpunkt hat.

b Weisen Sie nach, dass $F(x) = -\left(x^2 + 2x + 2\right) \cdot e^{1-x}$ ein Term einer Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt $(1|-3)$ verläuft. | 5

Der Graph von f beschreibt modellhaft die 7,5 Sekunden dauernde Fahrt eines Lastenaufzugs. Dabei ist x die seit Beginn der Fahrt vergangene Zeit in Sekunden und y die Geschwindigkeit des Aufzugs in Meter pro Sekunde.

c Entnehmen Sie der Abbildung die größte Geschwindigkeit des Aufzugs und geben Sie diese an. | 1

d Bestimmen Sie grafisch den Zeitraum, in dem die Geschwindigkeit mindestens $1{,}0\,\frac{m}{s}$ beträgt. | 2

e Berechnen Sie für den Zeitraum von 2,0 s bis 4,0 s nach Beginn der Fahrt die mittlere Änderung der Geschwindigkeit. | 3

f Geben Sie die Bedeutung der unterschiedlichen Vorzeichen von $f'(x)$ im Sachzusammenhang an. | 2

g Der Wert des Terms $\int_0^{7{,}5} f(x)\,dx$ kann als Länge der vom Aufzug zurückgelegten Strecke interpretiert werden. Berechnen Sie diese Länge. | 2

h Beurteilen Sie die Eignung des für die Fahrt des Aufzugs verwendeten Modells im Hinblick auf das Ende der Fahrt. | 2

i Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: | 4

Würde der Graph von f die Fahrt eines Aufzugs beschreiben, die länger als 7,5 Sekunden dauert, so wäre die von diesem Aufzug zurückgelegte Strecke – unabhängig von der Dauer seiner Fahrt – kürzer als 5,5 m.

Das für die 7,5 Sekunden dauernde Fahrt des Aufzugs bisher verwendete Modell wird geändert: Für $0 \le x \le 6$ wird die Fahrt weiterhin durch G_f, für $x \ge 6$ jedoch mithilfe der Tangente an G_f im Punkt $\left(6 \mid f(6)\right)$ beschrieben.

j Begründen Sie ohne weitere Rechnung mithilfe des Graphen von f', dass die Tangente an G_f im Punkt $\left(6 \mid f(6)\right)$ den Graphen von f für $x > 6$ nicht schneidet. 3

k Zeigen Sie rechnerisch, dass der Aufzug im geänderten Modell nach 7,5 Sekunden tatsächlich zum Stehen kommt. 5

l Der Aufzug legt im geänderten Modell während der gesamten Fahrtzeit von 7,5 Sekunden eine bestimmte Strecke zurück. Beschreiben Sie, wie man denjenigen Zeitpunkt berechnen könnte, bis zu dem der Aufzug diese Strecke im ursprünglichen Modell zurücklegt. 4

2 Betrachtet wird die in IR definierte Funktion $h: x \mapsto 1 + 2 \cdot (x-1)^2 \cdot e^{2-x}$.

a Begründen Sie, dass h keine Nullstelle besitzt. 2

b Es gilt $h(x) = 1 + 2 \cdot f(x-1)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von h schrittweise aus dem in der Abbildung gezeigten Graphen von f erzeugt werden kann. Begründen Sie, dass dabei die Reihenfolge der Schritte nicht beliebig ist. 5

c In der Abbildung stellt eine der beiden Kurven die Funktion f dar. Zeichnen Sie in die Abbildung ein Koordinatensystem ein, in dem diese Kurve die Funktion h darstellt. 3

d Geben Sie einen Term einer Stammfunktion von h an. 3

Erwartungshorizont

1 a
- Es gibt Werte $x_1 < 0$ und $x_2 > 0$, für die $G_{f'}$ für $x_1 < x < 0$ unterhalb der x-Achse und für $0 < x < x_2$ oberhalb verläuft.
- Es gibt Werte $x_3 < 0{,}6$ und $x_4 > 0{,}6$, für die G_f für $x_3 < x < 0{,}6$ linksgekrümmt und für $0{,}6 < x < x_4$ rechtsgekrümmt ist.

b $F'(x) = -(2x+2) \cdot e^{1-x} - \left(x^2+2x+2\right) \cdot e^{1-x} \cdot (-1) = \left(-2x-2+x^2+2x+2\right) \cdot e^{1-x}$

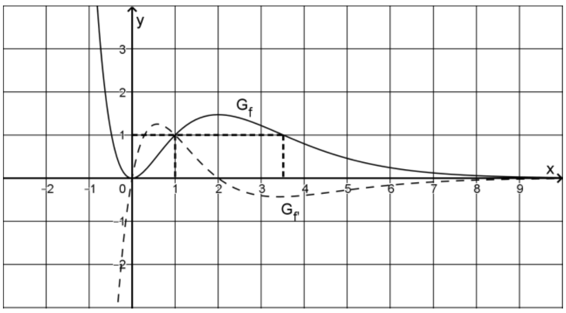
$= x^2 \cdot e^{1-x} = f(x)$

Der Term der gesuchten Stammfunktion hat die Form $F(x) + c$.

$F(1) + c = -3 \Leftrightarrow c = 2$

c $1{,}5\,\frac{m}{s}$

d



Der Zeitraum liegt zwischen 1,0 s und 3,5 s nach Beginn der Fahrt.

e $\frac{f(4)-f(2)}{2} \approx -0{,}34$, d. h. die Geschwindigkeit nimmt im betrachteten Zeitraum pro Sekunde um etwa $0{,}34\,\frac{m}{s}$ ab.

f Sind die Werte von $f'(x)$ positiv, so nimmt die Geschwindigkeit des Aufzugs zu, sind die Werte von $f'(x)$ negativ, so nimmt die Geschwindigkeit ab.

g $\int_0^{7{,}5} f(x)\,dx = F(7{,}5) - F(0) \approx 5{,}3$

Die Länge der zurückgelegten Strecke beträgt etwa 5,3 m.

h $f(7{,}5) > 0$, d. h. das Modell ist zur Beschreibung des Endes der Fahrt nicht geeignet, da das Stehenbleiben des Aufzugs nicht korrekt beschrieben wird.

i Für $r > 7{,}5$ gilt: $\int_0^{r} f(x)\,dx = F(r) - F(0) = -\left(r^2 + 2r + 2\right) \cdot e^{1-r} + 2e < 2e < 5{,}5$

j Für $x > 5$ ist $G_{f'}$ steigend, G_f also linksgekrümmt. Damit schneidet die Tangente den Graphen von f für $x > 6$ nicht.

k $f'(x) = 2x \cdot e^{1-x} + x^2 \cdot e^{1-x} \cdot (-1)$, $f'(6) = -\frac{24}{e^5}$, $f(6) = \frac{36}{e^5}$

Damit: $\frac{-f(6)}{x-6} = f'(6) \Leftrightarrow x = \frac{-f(6)}{f'(6)} + 6 = 7{,}5$

l Man berechnet den Inhalt A der Fläche, die die Tangente an G_f im Punkt $(6 \mid f(6))$ mit der Gerade mit der Gleichung $x = 6$ und der x-Achse einschließt.

Bezeichnet man den gesuchten Zeitpunkt mit t, so ergibt sich der Wert von t als Lösung der Gleichung $\int_6^{t} f(x)\,dx = A$.

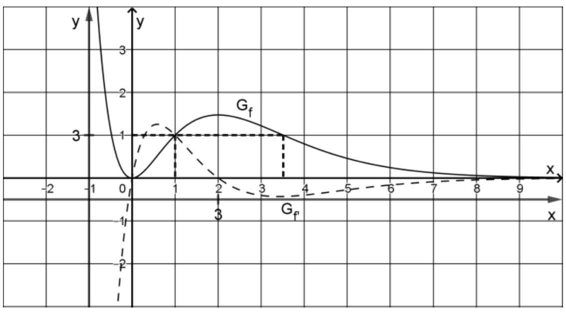
2 a Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x-1)^2 \geq 0$ und $e^{2-x} > 0$, d. h. $h(x) \geq 1$.

b Der Graph von h geht aus dem Graphen von f hervor durch:

- Verschiebung um 1 in positive x-Richtung
- Streckung mit dem Faktor 2 in y-Richtung
- Verschiebung um 1 in positive y-Richtung

Der Graph von f enthält den Punkt $(0 \mid 0)$. Würde man den zweiten und dritten Schritt vertauschen, so enthielte der so erzeugte Graph den Punkt $(1 \mid 2)$. Dieser liegt wegen $h(1) \neq 2$ nicht auf dem Graphen von h.

c



d $x + 2 \cdot F(x-1)$

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4	II			II		II		X	
b	5		II			II			X	
c	1			I	I		I	X		
d	2		I	I	I			X		
e	3			I		I		X		
f	2			I			I	X		
g	2					I		X		
h	2	II		II			II		X	
i	4	II	III			III				X
j	3	II			II		I		X	
k	5		II	I		II			X	
l	4		III	III			II			X
2 a	2	I	I			I		X		
b	5	II			II		II		X	
c	3	II	III		III					X
d	3		III		II	III				X

<u>2020 – WTR 1</u>

1 Gegeben ist die in IR definierte Funktion $f: x \mapsto -\frac{8}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2$, die die Nullstellen 0 und $\frac{9}{4}$ hat. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

a Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f. Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Informationen sowie des Funktionswerts für $x = -2$ in einem geeigneten Koordinatensystem. 7

b Die Tangente an G_f im Punkt $\left(\frac{9}{4} \mid 0\right)$ wird mit t bezeichnet. Weisen Sie nach, dass t durch den Punkt $\left(0 \mid \frac{27}{8}\right)$ verläuft. Begründen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks, das G_f im ersten Quadranten mit t und der y-Achse einschließt, kleiner als $\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{27}{8}$ ist. 5

2 Der Graph einer in $[0;3]$ definierten ganzrationalen Funktion g geht im Punkt $A(0 \mid 1{,}5)$ ohne Knick in die Gerade mit der Gleichung $y = 1{,}5$ über und im Punkt $B(3 \mid -0{,}5)$ ohne Knick in die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 11{,}5$.

a Zeigen Sie rechnerisch, dass der Grad von g unter den beschriebenen Bedingungen nicht zwei sein kann. 6

b Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von g. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem der Abstand des Punkts $M(1{,}5 \mid 1)$ zum Graphen von g berechnet werden könnte, wenn der Funktionsterm von g bekannt wäre. 5

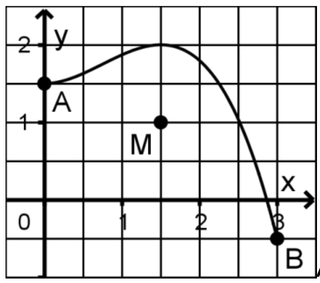


Abb. 1

3 In einer Messstation wird seit 1958 kontinuierlich die CO_2-Konzentration in der Luft gemessen, die in ppm (parts per million) angegeben wird. Die Tabelle gibt für die Jahre 1960, 1985 und 2010 jeweils den jährlichen Durchschnittswert der Messwerte an.

Jahr	1960	1985	2010
CO_2-Konzentration	317 ppm	346 ppm	390 ppm

a Die jährlichen Durchschnittswerte haben sich im Zeitraum von 1960 bis 1985 in guter Näherung exponentiell entwickelt. Ermitteln Sie die zugehörige jährliche Wachstumsrate in Prozent. 3

(zur Kontrolle: etwa 0,35 %)

b Berechnen Sie unter der Annahme, dass sich das exponentielle Wachstum nach 1985 in gleicher Weise fortgesetzt hat, den jährlichen Durchschnittswert für das Jahr 2010. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem zugehörigen Wert aus der Tabelle und formulieren Sie das Ergebnis Ihres Vergleichs im Sachzusammenhang. 3

Innerhalb eines Jahres schwankt die CO_2-Konzentration. Für einen bestimmten Zeitraum von acht Monaten lassen sich die gemessenen Werte modellhaft durch die in IR definierte Funktion $k: x \mapsto 3{,}3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 406$ beschreiben. Dabei ist x die in diesem Zeitraum vergangene Zeit in Monaten und $k(x)$ die CO_2-Konzentration in ppm. Vereinfachend wird davon ausgegangen, dass jeder Monat 30 Tage hat.

c Geben Sie an, wie der Graph von k schrittweise aus dem Graphen der in IR definierten Funktion $s: x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht. Beurteilen Sie, ob die Reihenfolge der einzelnen Schritte von Bedeutung ist. 5

d Der durchschnittliche Funktionswert einer Funktion h im Intervall $[a;b]$ kann mithilfe der folgenden Überlegung bestimmt werden: 6

Schließt der Graph von h mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ ein Flächenstück ein, so gibt es ein Rechteck der Länge $b - a$, das den gleichen Flächeninhalt wie das Flächenstück hat (vgl. Abbildung 2). Die Breite dieses Rechtecks stimmt mit dem Betrag des durchschnittlichen Funktionswerts von h im Intervall $[a;b]$ überein.

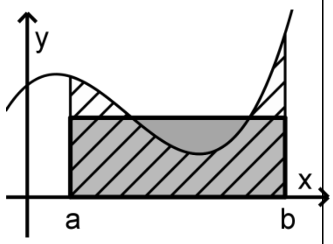


Abb. 2

Bestimmen Sie für den betrachteten Zeitraum von acht Monaten die prozentuale Abweichung des Maximums der CO_2-Konzentration von der durchschnittlichen CO_2-Konzentration.

Erwartungshorizont

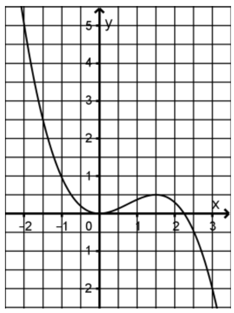
1 a $f'(x) = -\frac{8}{9}x^2 + \frac{4}{3}x$, $f''(x) = -\frac{16}{9}x + \frac{4}{3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(-\frac{8}{9}x + \frac{4}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{2}$

$f''(0) = \frac{4}{3} > 0$, $f''\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{3} < 0$

Damit hat G_f den Tiefpunkt $(0|0)$ und den Hochpunkt $\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)$.

$f(-2) \approx 5{,}0$



b $f'\left(\frac{9}{4}\right) = -\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} + \frac{27}{8} = 0$

Der angegebene Term gibt den Flächeninhalt des Dreiecks an, das die Koordinatenachsen mit der Tangente einschließen. Für $0 < x < \frac{9}{4}$ verläuft G_f innerhalb dieses Dreiecks.

2 a Aus den beschriebenen Bedingungen ergibt sich:
I: $g(0) = 1{,}5$; II: $g'(0) = 0$; III: $g(3) = -0{,}5$; IV: $g'(3) = -4$

Mit $g(x) = ax^2 + bx + c$ ergibt sich aus II $b = 0$, aus I $c = 1{,}5$ und damit aus III $a = -\frac{2}{9}$. Daraus folgt $g'(3) = -\frac{4}{3}$ im Widerspruch zu IV.

b Die Entfernungen von M zu den Punkten $(x|g(x))$ können in Abhängigkeit von x mithilfe der Funktion d mit $d(x) = \sqrt{(x - 1{,}5)^2 + (g(x) - 1)^2}$ bestimmt werden. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass sich die kleinste dieser Entfernungen nicht für einen der Punkte A und B ergibt. Berechnet man für die Lösungen der Gleichung $d'(x) = 0$ mit $x \in]0;3[$ die zugehörigen Funktionswerte von d, so entspricht der kleinste dieser Werte dem gesuchten Abstand.

3 a $317 \cdot p^{25} = 346$ liefert $p = \sqrt[25]{\frac{346}{317}} \approx 1{,}0035$, d. h. die jährliche Wachstumsrate beträgt etwa 0,35 %.

b $346 \cdot 1{,}0035^{25} \approx 378 < 390$

Der Durchschnittswert der CO_2-Konzentration für das Jahr 2010 ist größer als der, der sich bei einer unveränderten Fortsetzung des exponentiellen Wachstums ergeben hätte.

c Der Graph von k geht aus dem Graphen von s hervor durch

1. Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{6}{\pi}$
2. Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3,3
3. Verschiebung um 406 in positive y-Richtung

Die Reihenfolge der Schritte ist von Bedeutung. Würde man die Verschiebung in y-Richtung vor der Streckung in y-Richtung durchführen, so hätten die Punkte des entstehenden Graphen deutlich größere y-Koordinaten als die des Graphen von k.

d
$$\frac{1}{8}\cdot\int_0^8 k(x)\,dx = \frac{1}{8}\cdot\left[-\frac{3{,}3\cdot 6}{\pi}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)+406x\right]_0^8 \approx 407{,}2$$

$$\frac{k(3)-407{,}2}{407{,}2} = \frac{409{,}3-407{,}2}{407{,}2} \approx 0{,}5\,\%$$

<u>Standardbezug</u>

	BE	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
		allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
1 a	7	I			I	I		X		
b	5	II	II		I	I	II		X	
2 a	6	II	II			II	I		X	
b	5	III	III				III			X
3 a	3		II	II		I			X	
b	3			I		I	I	X		
c	5	II			II		II		X	
d	6			II	II	II	III			X

2020 – WTR 2

1 Die Abbildung 1 zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Tangente im Wendepunkt $W(4|18)$ des Graphen hat die Steigung -4.

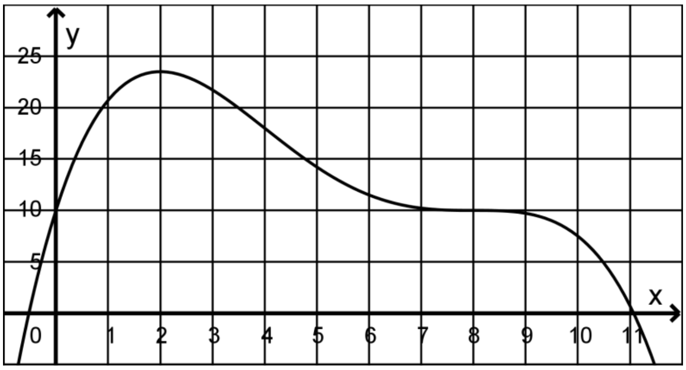


Abb. 1

a Zeichnen Sie die beschriebene Tangente in die Abbildung 1 ein und geben Sie die beiden Nullstellen der ersten Ableitungsfunktion f' von f an. 3

b Der Graph von f' hat einen Tiefpunkt. Geben Sie die Koordinaten dieses Tiefpunkts an und begründen Sie Ihre Angabe. 3

c Beurteilen Sie die folgende Aussage: 3

Für jede Stammfunktion F von f gilt $F(x+2) > F(x) + 20$ für jeden Wert von $x \in [0;5]$.

2 Für jeden Wert von $k \in \mathbb{R}^+$ wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h_k : x \mapsto 10 \cdot \left(1 - e^{-kx}\right) \cdot e^{-x}$ betrachtet. Der Graph von h_k wird mit G_k bezeichnet. Die Abbildung 2 zeigt G_1.

Für die erste Ableitungsfunktion h_k' von h_k gilt $h_k'(x) = 10 \cdot \left((k+1) \cdot e^{-kx} - 1\right) \cdot e^{-x}$.

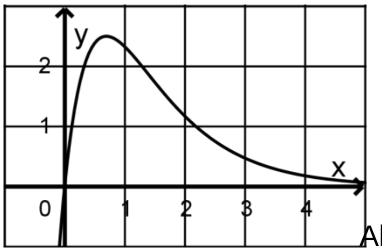


Abb. 2

a Begründen Sie, dass h_k nur die Nullstelle $x = 0$ hat. Geben Sie den Grenzwert von h_k für $x \to +\infty$ an. 3

b Bestimmen Sie die x-Koordinate des Hochpunkts von G_k. 3

c Betrachtet werden die Tangente an G_k im Koordinatenursprung und die Gerade, die zu dieser Tangente im Koordinatenursprung senkrecht steht. Diese beiden Geraden schneiden die Gerade mit der Gleichung $y = 1$. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Abstand der beiden Schnittpunkte $10k + \frac{1}{10k}$ ist. 5

d Betrachtet man den Abstand aus Teilaufgabe 2c für alle Werte von k, so ist dieser für einen Wert von k am kleinsten. Bestimmen Sie diesen Wert und geben Sie den zugehörigen Abstand an. 3

3 Am 26. April 1986 ereignete sich in der Ukraine ein Reaktorunfall, bei dem radioaktives Plutonium-241 freigesetzt wurde. Plutonium-241 zerfällt exponentiell, d. h. in jedem Jahr nimmt die Masse des vorhandenen Plutonium-241 um einen konstanten prozentualen Anteil ab.

Im Folgenden wird der Zerfall einer bestimmten Menge Plutonium-241 betrachtet. Dieser Zerfall wird durch die Funktion p mit $p(x) = 200 \cdot e^{-0{,}0480x}$ und $x \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Jahren, die seit dem Reaktorunfall vergangen ist, und $p(x)$ die Masse des verbliebenen Plutonium-241 in Milligramm.

a Geben Sie die Bedeutung des Faktors 200 im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Plutonium-241 in jedem Jahr abnimmt. 3

b Bestimmen Sie das Jahr, in dessen Verlauf erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein wird. 4

Bei dem Zerfall des Plutonium-241 entsteht radioaktives Americium-241, das ebenfalls exponentiell zerfällt. Im verwendeten Modell gibt die Funktion a mit $a(x) = 207 \cdot \left(1 - e^{-0{,}0464x}\right) \cdot e^{-0{,}0016x}$ für jedes Jahr die Masse des vorhandenen Americium-241 in Milligramm an.

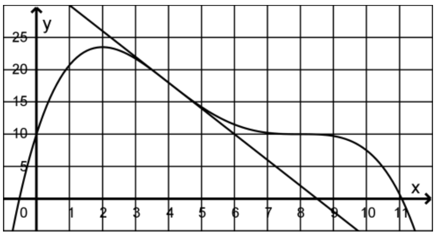
c Der Graph von a kann für einen Wert von k aus dem Graphen der Funktion h_k aus Aufgabe 2 erzeugt werden, indem man diesen in x-Richtung und in y-Richtung streckt. Geben Sie die beiden Streckungsfaktoren an und bestimmen Sie den passenden Wert von k. 3

d Im Funktionsterm von a erfasst der Faktor $1 - e^{-0{,}0464x}$ die Zunahme der Masse des vorhandenen Americium-241 und der Faktor $e^{-0{,}0016x}$ den Zerfall des vorhandenen Americium-241. Begründen Sie, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem beide Faktoren den gleichen Wert annehmen. 3

e Geben Sie die Bedeutung der Aussage $\frac{a(73)}{73} \approx 2{,}4$ im Sachzusammenhang an. Begründen Sie Ihre Angabe. 4

<u>Erwartungshorizont</u>

1 a



$x_1 = 2,\ x_2 = 8$

b Die Steigung des Graphen von f im Wendepunkt W ist -4. In unmittelbarer Umgebung von W ist die Steigung des Graphen von f größer als -4. Damit hat der Graph von f' den Tiefpunkt $(4\,|\,-4)$.

c Die Aussage ist richtig.

Begründung: Für jeden Wert $x_0 \in [0;5]$ ist $F(x_0 + 2) - F(x_0)$ der Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = x_0$ und $x = x_0 + 2$ einschließt. Dieser Inhalt ist für jeden dieser Werte x_0 größer als der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 2 und 10, d. h. größer als 20.

2 a $h_k(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-kx} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h_k(x) = 0$

b $h_k'(x)=0 \Leftrightarrow e^{-kx}=\frac{1}{k+1} \Leftrightarrow -kx=-\ln(k+1) \Leftrightarrow x=\frac{1}{k}\cdot\ln(k+1)$

c Die Tangente hat die Steigung $h_k'(0)=10k$, die dazu senkrechte Gerade die Steigung $-\frac{1}{10k}$. Damit sind die beiden Schnittpunkte $\left(\frac{1}{10k}\,|\,1\right)$ und $(-10k\,|\,1)$. Deren Abstand ist $10k+\frac{1}{10k}$.

d Für die Funktion d mit $d(k)=10k+\frac{1}{10k}$ gilt $d'(k)=10-\frac{1}{10k^2}=0 \Leftrightarrow k=\frac{1}{10}$.
Abstand: $d\left(\frac{1}{10}\right)=2$

3 a 200 gibt die Masse zum Zeitpunkt des Unfalls in Milligramm an.

$e^{-0{,}048}\approx 0{,}953$, d. h. die Masse nimmt in jedem Jahr um etwa 4,7 % ab.

b $200\cdot e^{-0{,}048x}<1 \Leftrightarrow e^{-0{,}048x}<\frac{1}{200} \Leftrightarrow -0{,}048x<-\ln 200$ liefert $x>\frac{\ln 200}{0{,}048}\approx 110{,}4$

Damit wird im Jahr 2096 erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein.

c Streckungsfaktor in x-Richtung: 625
Streckungsfaktor in y-Richtung: 20,7
$k=\frac{-0{,}0464}{-0{,}0016}=29$

d Der Faktor $1-e^{-0{,}0464x}$ hat für $x=0$ den Wert 0 und es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-e^{-0{,}0464x}\right)=1$. Der Faktor $e^{-0{,}0016x}$ hat für $x=0$ den Wert 1 und es gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-0{,}0016x}=0$. Stellt man die Werte der beiden Faktoren für $x\in \mathrm{IR}_0^+$ grafisch dar, so haben die beiden Graphen keine Sprungstellen und damit einen Schnittpunkt.

e Die Masse des Americium-241 nimmt in den ersten 73 Jahren nach dem Reaktorunfall im Mittel pro Jahr um 2,4 Milligramm zu.

Begründung: Die mittlere Änderung pro Jahr beträgt $\frac{a(73)-a(0)}{73-0}$, wobei $a(0)=0$ gilt. Bei der Änderung handelt es sich um eine Zunahme, da der Wert des gegebenen Terms positiv ist.

<u>Standardbezug</u>

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I			I			X		
b	3	II	II		I		I		X	
c	3	III	III		II		IIÍ			X
2 a	3	I				I		X		
b	3					II			X	
c	5		II			II	II		X	
d	3		II			II			X	
3 a	3			I	I	I	I	X		
b	4		II	II		II			X	
c	3	III	III		III	III				X
d	3	III	III			II	II			X
e	4	II	III	III	II	II	II			X

2020 – WTR 3

Gegeben ist die Schar der in IR definierten Funktionen $f_k : x \mapsto e^{kx} - x - 1$ mit $k \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

1 Betrachtet wird zunächst die Funktion f_{10} mit $f_{10}(x) = e^{10x} - x - 1$.

a Die Abbildung 1 zeigt G_{10}. Im dargestellten Bereich gibt es zwei Rechtecke, die jeweils die beiden folgenden Eigenschaften haben: 3

- Zwei Eckpunkte liegen auf der x-Achse und zwei Eckpunkte auf G_{10}.
- Eine Seitenlänge beträgt 0,4.

Zeichnen Sie diese beiden Rechtecke in die Abbildung 1 ein. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die beiden Rechtecke unterschiedliche Flächeninhalte haben.

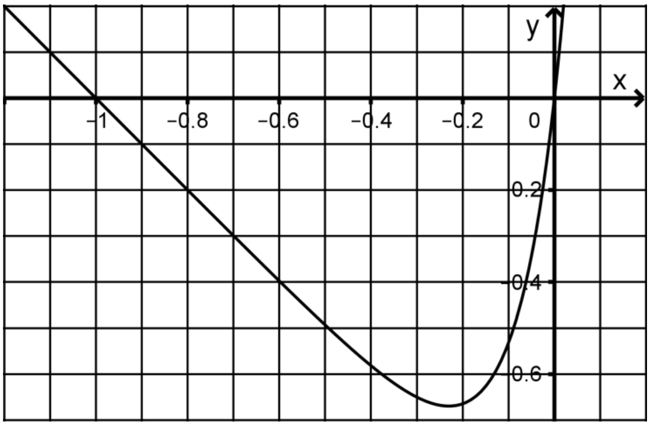


Abb. 1

b Begründen Sie, dass G_{10} und die Gerade mit der Gleichung $y = -x - 1$ keinen Punkt gemeinsam haben. Beschreiben Sie sowohl für $x \to -\infty$ als auch für $x \to +\infty$ den Verlauf von G_{10} bezüglich dieser Gerade. 3

c Berechnen Sie den Wert des Terms $\int_{-1}^{0} f_{10}(x)\,dx$. 3

d Betrachtet wird der Inhalt der Fläche, die G_{10} mit der x-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = -1$ einschließt. Begründen Sie, dass dieser Inhalt geringfügig größer ist als der Wert des Terms $\left|\int_{-1}^{0} f_{10}(x)\,dx\right|$, ohne den Inhalt zu berechnen. 3

2 Betrachtet wird nun die gesamte Schar der Funktionen f_k.

a Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau einen Punkt gemeinsam haben, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. 3

b Die Abbildung 2 zeigt vier Graphen der Schar, darunter diejenigen zu den Werten $k = -1$, $k = 0$ und $k = 1$. Nehmen Sie die passende Zuordnung vor. 3

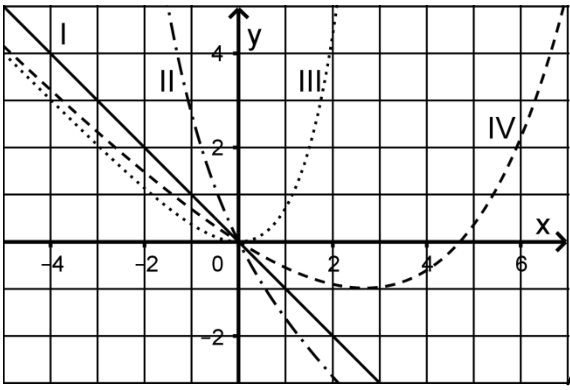


Abb. 2

Für die erste Ableitungsfunktion von f_k gilt $f_k'(x) = k \cdot e^{kx} - 1$.

c Beim Ableiten von f_k wurde die folgende Regel angewendet: 3

Betrachtet man differenzierbare Funktionen u, v und w mit $w(x) = v(u(x))$, so hat die erste Ableitungsfunktion von w den Term $w'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$.

Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem Ableiten von f_k und dieser Regel her, indem Sie für u, v und w jeweils einen passenden Funktionsterm angeben.

d Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_k weder Hochpunkte noch Wendepunkte haben. 5

Für positive Werte von k hat G_k den Tiefpunkt $T_k\left(-\frac{\ln k}{k} \mid \frac{\ln k}{k} - 1 + \frac{1}{k}\right)$.

e Ermitteln Sie den Abstand von T_k zur Gerade mit der Gleichung $y = -x - 1$. 5

f Für $k \to +\infty$ nähert sich T_k einem Punkt A. Bestimmen Sie die Koordinaten von A. 2

g Berechnen Sie denjenigen Wert von k, für den G_k im Koordinatenursprung einen Steigungswinkel der Größe 60° hat. 2

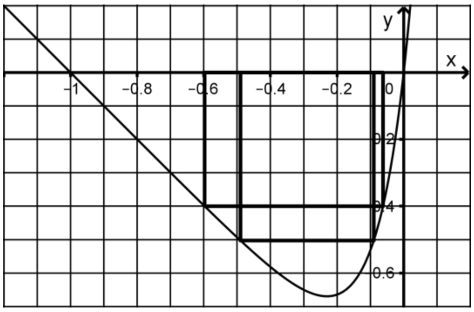
h Betrachtet wird die folgende Behauptung: 5

Zu zwei beliebigen verschiedenen Graphen G_{k_1} und G_{k_2} gibt es einen Wert von x, für den die beiden Graphen die gleiche Steigung haben.

Unter der Voraussetzung, dass k_1 und k_2 positiv sind, ist die Behauptung richtig; bestimmen Sie den zugehörigen Wert von x. Entscheiden Sie, ob die Behauptung auch dann richtig sein kann, wenn entweder k_1 oder k_2 nicht positiv ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Erwartungshorizont

1 a



Die beiden Rechtecke stimmen nur in einer der beiden Seitenlängen überein.

b $f_{10}(x) - (-x - 1) = e^{kx} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Für $x \to -\infty$ kommt G_{10} der Gerade beliebig nahe, für $x \to +\infty$ entfernt sich G_{10} beliebig weit von der Gerade.

c $\int_{-1}^{0} f_{10}(x)\,dx = \left[\frac{1}{10}e^{10x} - \frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-10} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{10}e^{-10} - \frac{2}{5}$

d $f_{10}(-1) > 0$, d. h. G_{10} schneidet für einen Wert von x mit $-1 < x < 0$ die x-Achse. Der Term gibt die Differenz der Inhalte der beiden Teile der beschriebenen Fläche an, die unterhalb bzw. oberhalb der x-Achse liegen. Damit ist der Inhalt der beschriebenen Fläche größer als der Wert des gegebenen Terms, unterscheidet sich von diesem Wert aber nur geringfügig, da der oberhalb der x-Achse liegende Teil der Fläche viel kleiner ist als der unterhalb liegende Teil.

2 a Für $k_1 \neq k_2$ gilt: $f_{k_1}(x) = f_{k_2}(x) \Leftrightarrow e^{k_1 x} = e^{k_2 x} \Leftrightarrow x = 0$

$y = f_k(0) = 0$

b I: $k = 0$, II: $k = -1$, III: $k = 1$

c $u(x) = kx$, $v(x) = e^x$, $w(x) = e^{kx}$

d $f_k''(x) = k^2 \cdot e^{kx}$

Für $k = 0$ gilt $f_0(x) = -x$. G_0 hat als Gerade weder einen Hochpunkt noch einen Wendepunkt.

Für $k \neq 0$ gilt $f_k''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. G_k ist durchgehend linksgekrümmt und hat damit weder einen Hochpunkt noch einen Wendepunkt.

e Die Gerade hat die Steigung -1. Damit stimmen die in x- und y-Richtung gemessenen Entfernungen von T_k zur Gerade überein und betragen jeweils $\frac{\ln k}{k} - 1 + \frac{1}{k} - \left(\frac{\ln k}{k} - 1\right) = \frac{1}{k}$. Der gesuchte Abstand a ist also die Hälfte der Länge der Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge $\frac{1}{k}$.

Damit gilt $(2a)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{\frac{1}{2k^2}}$.

f Mit $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{\ln k}{k} = 0$ und $\lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k} = 0$ ergibt sich $A(0 \mid -1)$.

g $f_k'(0) = \tan 60° \Leftrightarrow k - 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow k = 1 + \sqrt{3}$

h Für $k_1, k_2 > 0$ mit $k_1 \neq k_2$ gilt:

$f_{k_1}'(x) = f_{k_2}'(x) \Leftrightarrow k_1 \cdot e^{k_1 x} = k_2 \cdot e^{k_2 x} \Leftrightarrow e^{(k_1 - k_2) \cdot x} = \frac{k_2}{k_1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{k_1 - k_2} \cdot \ln \frac{k_2}{k_1}$

Es gilt $e^{kx} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit hat die Gleichung $k_1 \cdot e^{k_1 x} = k_2 \cdot e^{k_2 x}$ keine Lösung, wenn entweder k_1 oder k_2 nicht positiv ist. In diesem Fall kann die Behauptung also nicht richtig sein.

<u>Standardbezug</u>

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I			I			X		
b	3	II				II	II		X	
c	3					I		X		
d	3	III	II		II		III			X
2 a	3					II			X	
b	3	II			I	I			X	
c	3	II			II		II		X	
d	5	II	II			II			X	
e	5		III			II				X
f	2	I	I			I		X		
g	2		II			II			X	
h	5	III	III			II	II			X

2015 – WTR 1

In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Körper ABCDPQRS mit $A(28|0|0)$, $B(28|10|0)$, $C(0|10|0)$, $D(0|0|0)$ und $P(20|0|6)$ gegeben. Der Körper ist ein schiefes Prisma, die Grundfläche ABCD, die Deckfläche PQRS und die vier Seitenflächen sind also Parallelogramme.

a Zeigen Sie, dass die Seitenfläche ABQP quadratisch ist. 3

b Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem grafisch dar. 3

c Die Seitenfläche ABQP liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $E: 3x + 4z - 84 = 0$)

d Die Seitenfläche CDSR liegt in einer Ebene F. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass F durch die Gleichung $3x + 4z = 0$ beschrieben werden kann. 2

Das Prisma beschreibt modellhaft den Grundkörper eines Kunstwerks aus massivem Beton, der auf einer horizontalen Fläche steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 0,1 m in der Wirklichkeit.

Der Grundkörper ist mit einer dünnen geradlinigen Bohrung versehen, die im Modell vom Punkt $G(11|3|6)$ der Deckfläche aus in Richtung des Schnittpunkts der Diagonalen der Grundfläche verläuft. In der Bohrung ist eine gerade Stahlstange mit einer Länge von 1,4 m so befestigt, dass die Stange zu drei Vierteln ihrer Länge aus der Deckfläche herausragt und in einer Höhe von 0,9 m über der Deckfläche endet. Ihr Durchmesser wird im Modell vernachlässigt.

e Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Stange in der Bohrung endet. 6

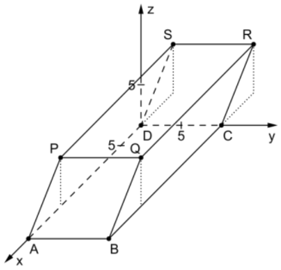
f Auf der Deckfläche des Grundkörpers liegt eine Stahlkugel mit einem Durchmesser von 0,8 m. Im Modell berührt die Kugel die Deckfläche des Prismas im Punkt K. Beschreiben Sie, wie man im Modell rechnerisch überprüfen könnte, ob die Stahlkugel die Stange berührt, wenn die Koordinaten von K bekannt wären. 4

g Zum Schutz vor Beschädigungen während einer Baumaßnahme soll diejenige Seitenfläche des Kunstwerks, die im Modell durch das Quadrat ABQP dargestellt wird, mit einer rechteckigen Holzplatte so versehen werden, dass diese am Kunstwerk anliegt, sowohl unten als auch seitlich bündig mit diesem abschließt und in einer Höhe von 1 m über der Deckfläche endet. Untersuchen Sie, ob die Lage der Stahlstange das Anbringen der Holzplatte zulässt. 4

Erwartungshorizont

a $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AP} = 0$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right|$

Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel und zwei benachbarten Seiten gleicher Länge ist ein Quadrat.

b 

c $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AP}$; $p, q \in \mathbb{R}$

Das daraus resultierende Gleichungssystem

I $x = 28 - 8q$ II $y = 10p$ III $z = 6q$

liefert $E: 3x + 4z - 84 = 0$.

d Die Ebene F ist parallel zur Ebene E. Eine Gleichung von F hat deshalb auch die Form $3x + 4z + r = 0$ mit $r \in \mathbb{R}$. Da F den Koordinatenursprung enthält, ist $r = 0$.

e Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche: $H(14 | 5 | 0)$

Es gilt: $\left|\overrightarrow{GH}\right| = 7$, $\frac{1}{4} \cdot 1{,}4\,\text{m} = 0{,}35\,\text{m} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7\,\text{m}$

Mittelpunkt der Strecke von G nach H: $(12{,}5 | 4 | 3)$

f Man erhält den Mittelpunkt M der Kugel, indem man K um vier Längeneinheiten in positive z-Richtung verschiebt. Anschließend berechnet man den Abstand d von M zu der Geraden, entlang derer die Stange im Modell verläuft. Genau dann, wenn sich $d = 4$ ergibt, berührt die Stahlkugel die Stange.

g Gleichung der Geraden, entlang derer die Stange im Modell verläuft:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

$$3 \cdot (11 + 3t) + 4 \cdot (6 - 6t) - 84 = 0 \Leftrightarrow t = -1{,}8$$

Für alle Punkte, die im Modell auf der Stange liegen, gilt $t \geq -1{,}5$, d. h. die Lage der Stange lässt das Anbringen der Holzplatte zu.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	X	X	X			I				I		X		
b	3			X						I			X		
c	3	X		X							II			X	
d	2			X			II	II						X	
e	6	X	X	X				II	II		I			X	
f	4		X	X				III	III			III			X
g	4	X		X				III	III		II				X

2015 – CAS 1

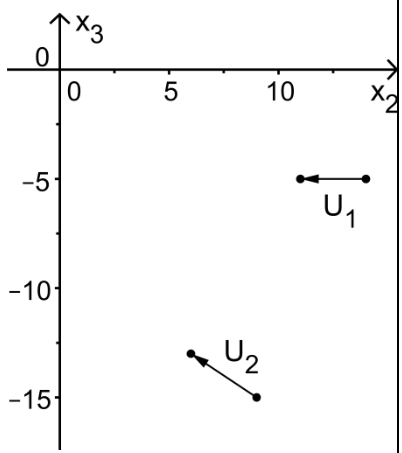
Die Bewegungen zweier Forschungs-U-Boote U_1 und U_2, die von einer Forschungsstation mithilfe eines Sonarsystems geortet werden, sollen modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben werden. Im Modell, das den Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.27 Uhr erfasst, bewegen sich beide U-Boote geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit, U_1 entlang der Geraden g_1, U_2 entlang der Geraden g_2. Die Positionen von U_1 um 12.20 Uhr und 12.21 Uhr werden durch die Punkte $P_0(4|14|-5)$ bzw. $P_1(6|11|-5)$ dargestellt, die Positionen von U_2 zu denselben Zeitpunkten durch $Q_0(11|9|-15)$ bzw. $Q_1(9|6|-13)$. Die Wasseroberfläche wird durch die x_1x_2-Ebene, die Lage der Forschungsstation durch den Punkt $F(12|11{,}5|0)$ beschrieben. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 100 m in der Realität.

a Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung von g_1 und g_2. Geben Sie für die dabei verwendeten Parameter jeweils das Intervall an, das dem erfassten Zeitraum entspricht. 3

b Geben Sie die Koordinaten der Punkte an, die die Positionen von U_1 und U_2 um 12.27 Uhr darstellen. 2

c Ermitteln Sie die Geschwindigkeit von U_2 in Knoten ($1\,\text{kn} \approx 1{,}852\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$). 3

d Die Abbildung zeigt die Bewegungen von U_1 und U_2 im Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.21 Uhr als Projektion in die x_2x_3-Ebene. 4



Stellen Sie die Bewegungen der beiden U-Boote für den gesamten erfassten Zeitraum von 12.20 Uhr bis 12.27 Uhr als Projektion in die x_1x_2-Ebene grafisch dar.

Begründen Sie anhand dieser beiden Projektionen, dass sich die Geraden, entlang derer sich U_1 und U_2 bewegen, nicht schneiden.

e Der Nachweis, dass zwei Geraden windschief zueinander sind, kann nicht nur grafisch, sondern auch rechnerisch geführt werden. Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Gleichungen von g_1 und g_2 zeigen könnte, dass die beiden Geraden windschief zueinander sind. Geben Sie für jeden Schritt des beschriebenen Vorgehens die Bedeutung hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Geraden an. 3

f Der Abstand der beiden Geraden, entlang derer sich U_1 und U_2 im Modell bewegen, ist 7. Begründen Sie, dass daraus nicht geschlossen werden kann, dass sich die U-Boote im erfassten Zeitraum bis auf 700 m nähern. 3

g Von den U-Booten aus können Unterwasseraufnahmen direkt zur Forschungsstation übertragen werden, sofern ihr jeweiliger Abstand zur Station maximal 850 m beträgt. Ermitteln Sie rechnerisch, wie lange die Forschungsstation Aufnahmen von U_1 empfangen kann. 3

h Befindet sich eines der beiden U-Boote von der Forschungsstation aus gesehen genau hinter dem anderen U-Boot, so kann es vom Sonarsystem der Station nicht erfasst werden. Untersuchen Sie im Modell, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem dies der Fall ist. 4

Erwartungshorizont

a $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$; $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $q \in \mathbb{R}$

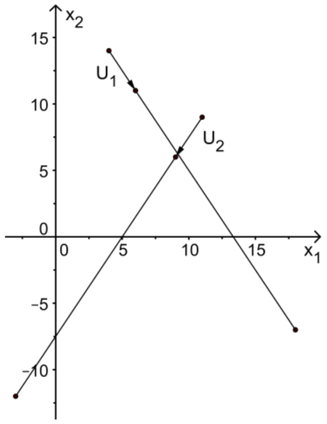
Intervalle: $p \in [0;7]$, $q \in [0;7]$

b Position von U_1: $(18 \mid -7 \mid -5)$

Position von U_2: $(-3 \mid -12 \mid -1)$

c $100 \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \frac{60}{1852} \approx 13{,}4$

Die Geschwindigkeit beträgt etwa 13,4 Knoten.

d 

Die beiden Geraden, entlang derer sich die beiden U-Boote im Modell bewegen, schneiden sich zwar in beiden Projektionen, die x_2-Koordinaten der zugehörigen Schnittpunkte stimmen jedoch nicht überein.

e Man könnte zeigen, dass

- die Richtungsvektoren von g_1 und g_2 nicht kollinear, die beiden Geraden also nicht parallel sind,

und dass

- die Gleichung $\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $p, q \in \mathbb{R}$, keine Lösung hat, g_1 und g_2 sich also nicht schneiden.

f Der Abstand der beiden Geraden ist die Länge ihres gemeinsamen Lots. Befinden sich die beiden U-Boote nicht zum selben Zeitpunkt des erfassten Zeitraums in den Positionen, die im Modell durch die Fußpunkte dieses Lots dargestellt werden, so sind sie in diesem Zeitraum stets weiter als 700 m voneinander entfernt.

g $\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 11{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \le 8{,}5 \Leftrightarrow \frac{-\left(\sqrt{1013} - 47\right)}{26} \le p \le \frac{\sqrt{1013} + 47}{26}$

Die Forschungsstation kann etwa zweieinhalb Minuten lang Aufnahmen von U_1 empfangen.

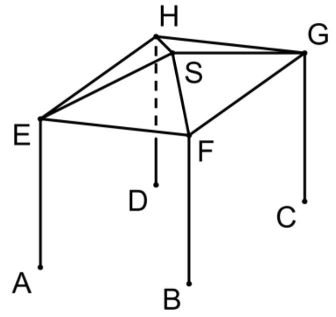
h $\overrightarrow{OF} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \overrightarrow{OF} \right) = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p = 2{,}5 \wedge r = 2$

Zweieinhalb Minuten nach Beginn des erfassten Zeitraums kann eines der U-Boote vom Sonarsystem der Station nicht erfasst werden.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	X		X					I		I		X		
b	2	X		X					I		I		X		
c	3	X	X	X				II	II		II			X	
d	4			X			II		II	II				X	
e	3	X		X			II				II	II		X	
f	3			X			III		II			III			X
g	3	X	X	X				II	II		II			X	
h	4	X		X				III	III		III				X

2017 – WTR 1



Ein Turm auf einem Spielplatz besteht aus vier 4,50 m langen, vertikal stehenden Pfosten, vier horizontalen Balken und einem Dach in Form einer geraden Pyramide. Die Abbildung zeigt den Turm schematisch. Die Dicke der Bauteile des Turms soll vernachlässigt werden.

In einem kartesischen Koordinatensystem können die Enden der Pfosten für einen Wert von z mit $z \in \mathbb{R}$ modellhaft durch die Punkte $A(2|-3|z)$, B, C und $D(-3|-2|z)$ sowie $E(2|-3|4)$, $F(3|2|4)$, $G(-2|3|4)$ und H dargestellt werden, die Spitze des Dachs durch den Punkt $S(0|0|5)$. Dabei beschreibt die x_1x_2-Ebene den Untergrund; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Wirklichkeit.

a Geben Sie an, wie tief die Pfosten in den Untergrund hineinreichen. 1

b Geben Sie die Koordinaten des Punkts H an. Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist. 5

c Begründen Sie, dass die Pyramide EFGHS symmetrisch zur x_3-Achse ist. 3

d Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. 4

e An der Spitze des Dachs ist eine gerade Stange befestigt, deren oberer Endpunkt im Modell durch einen Punkt T dargestellt wird. Auf den Turm treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$ beschreiben. Der Schatten der Stange liegt vollständig auf der Dachfläche, die durch das Dreieck EFS beschrieben wird. Beschreiben Sie, wie man die Länge dieses Schattens berechnen kann, wenn die Koordinaten von T und $\vec{v}$ bekannt sind. 4

f Zur Stabilisierung des Turms wurden zusätzliche Balken mit einer Länge von 2,10 m verwendet. Ein solcher Balken ist mit einem Ende in einer Höhe von 3,50 m über dem Untergrund an einem der vertikal stehenden Pfosten befestigt, mit dem anderen Ende an einem der beiden darauf liegenden horizontalen Balken. Der obere Befestigungspunkt teilt den horizontalen Balken in zwei Abschnitte. Bestimmen Sie das Verhältnis der Längen der beiden Abschnitte. 5

g Es soll eine vertikale Kletterstange aufgestellt werden, deren Fußpunkt im Modell durch einen Punkt P der x_1x_2-Ebene beschrieben wird. Die Kletterstange soll von dem Pfosten, der durch $\overline{AE}$ dargestellt wird, doppelt so weit entfernt sein wie von dem Pfosten, der durch $\overline{BF}$ dargestellt wird. Bestimmen Sie für zwei mögliche Positionen der Kletterstange jeweils die Koordinaten von P. 3

Erwartungshorizont

a Die Pfosten ragen 0,5 m in den Untergrund hinein.

b $H(-3|-2|4)$

Wegen $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ ist es ein Parallelogramm, wegen $\overrightarrow{EF} \circ \overrightarrow{FG} = 0$ und $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\overrightarrow{FG}\right|$ ein Quadrat.

c Die Pyramide ist gerade und hat eine quadratische Grundfläche, die parallel zur x_1x_2-Ebene ist. Der Mittelpunkt der Grundfläche liegt ebenso auf der x_3-Achse wie die Spitze S.

d $L: \vec{x} = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EF} + s \cdot \overrightarrow{ES};\ r,s \in \mathbb{R}$

Das daraus resultierende Gleichungssystem

$\text{I}\quad x_1 = 2 + r - 2s \qquad \text{II}\quad x_2 = -3 + 5r + 3s \qquad \text{III}\quad x_3 = 4 + s$

liefert: $L: 5x_1 - x_2 + 13x_3 = 65$

e Man berechnet die Koordinaten des Schnittpunkts der Ebene L und der Geraden, die durch T verläuft und den Richtungsvektor $\vec{v}$ hat. Der Abstand dieses Schnittpunkts vom Punkt S ist die Länge des Schattens in Metern.

f Wählt man für die beiden Punkte, die im Modell die beiden Enden des zusätzlichen Balkens darstellen, $I \in \overline{AE}$ und $J \in \overline{EF}$, so gilt:

- I hat die Koordinaten $(2\,|\,-3\,|\,3{,}5)$.
- J liegt auf der Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{OE} + t \cdot \overrightarrow{EF}$ mit $t \in \mathbb{R}$, hat also die Koordinaten $(2+t\,|\,-3+5t\,|\,4)$.

Für $0 \le t \le 1$ gilt: $\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \sqrt{t^2 + (5t)^2 + 0{,}5^2} = 2{,}1 \Leftrightarrow t = 0{,}4$

Damit ergibt sich als Verhältnis $2:3$.

g Mit $A'(2\,|\,-3\,|\,0)$ und $B'(3\,|\,2\,|\,0)$ liefert

- $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'B'}$: $P_1\left(\frac{8}{3}\,\middle|\,\frac{1}{3}\,\middle|\,0\right)$,
- $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA'} + 2 \cdot \overrightarrow{A'B'}$: $P_2(4\,|\,7\,|\,0)$.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1	X	X	X			I		I		I		X		
b	5	X		X			I			I	I		X		
c	3	X		X			II	II				II		X	
d	4	X		X							II			X	
e	4		X	X				II	II			II		X	
f	5	X	X	X				III	III		III				X
g	3	X	X	X				III			II	II			X

2017 – WTR 2

In einem kartesischen Koordinatensystem ist das Viereck ABCD mit $A(0|0|1)$, $B(2|6|1)$, $C(-4|8|5)$ und $D(-6|2|5)$ gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks wird mit M bezeichnet.

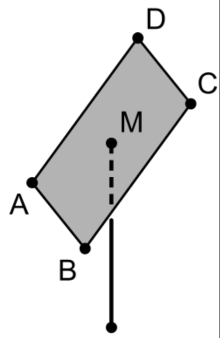
a Begründen Sie, dass die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft. 2

b Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist. Geben Sie die Koordinaten von M an. 4

c Das Rechteck ABCD liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$)

Solarmodule werden auf einem Trägergestell montiert, das an einem vertikal stehenden Metallrohr befestigt ist. Die gesamte Fläche der Solarmodule wird zu einem bestimmten Zeitpunkt modellhaft durch das Rechteck ABCD dargestellt. Das Metallrohr lässt sich im Modell durch eine Strecke beschreiben, der Befestigungspunkt am Trägergestell durch den Punkt M (vgl. Abbildung). Im Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht 0,8 m in der Wirklichkeit.



d Im Sinne eines möglichst großen Energieertrags sollte der Neigungswinkel φ der Modulfläche gegenüber der Horizontalen zwischen 30° und 36° liegen. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. 3

e Zum betrachteten Zeitpunkt fällt das Sonnenlicht, das im Modell durch parallele Geraden dargestellt wird, senkrecht auf die Fläche der Solarmodule. Diese Fläche erzeugt auf dem horizontalen Untergrund einen rechteckigen Schatten. Begründen Sie unter Verwendung einer geeignet beschrifteten Skizze, dass der Flächeninhalt des Schattens mithilfe des Terms $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \frac{\left|\overrightarrow{AD}\right|}{\cos\varphi} \cdot (0{,}8\,\text{m})^2$ berechnet werden kann. 5

Um die Solarmodule während eines Tages ständig möglichst gut nach der Sonneneinstrahlung ausrichten zu können, lässt sich das Metallrohr mit dem Trägergestell um die Längsachse des Rohrs drehen. Die Neigung des Trägergestells bleibt dabei unverändert.

f Betrachtet wird der untere linke Eckpunkt der Modulfläche, der im Modell durch den Punkt A dargestellt wird. Berechnen Sie den Radius des Kreises, auf dem sich dieser Eckpunkt bei der Drehung des Metallrohrs bewegt. 4

g Begründen Sie ohne zu rechnen, dass der in Teilaufgabe f ermittelte Radius entsprechend auch für den unteren rechten Eckpunkt der Modulfläche gilt. 3

Erwartungshorizont

a Die x_3-Koordinaten der Punkte A und B stimmen überein.

b $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$
$M(-2|4|3)$

c $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AC}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Das daraus resultierende Gleichungssystem

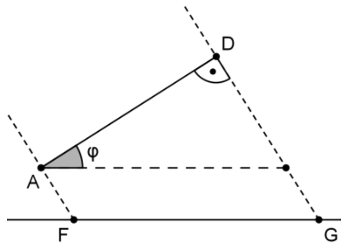
I $x_1 = 2\lambda - 4\mu$ II $x_2 = 6\lambda + 8\mu$ III $x_3 = 1 + 4\mu$

liefert $3x_1 - x_2 + 5x_3 - 5 = 0$.

d Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\varphi = \frac{\vec{m} \circ \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|}$, d. h. $\varphi \approx 32{,}3°$

Die Bedingung ist erfüllt.

e Da die Gerade AB parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft, ist $|\overrightarrow{AB}|$ die Breite des Rechtecks, das den Schatten im Modell darstellt. Da $\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{FG}|}$ gilt, ist $\frac{|\overrightarrow{AD}|}{\cos\varphi}$ die Länge dieses Rechtecks. Durch den Faktor $(0{,}8\,\text{m})^2$ wird der Maßstab berücksichtigt.



f Fußpunkt des Lots von A auf die Strecke, die das Metallrohr darstellt: $L(-2\,|\,4\,|\,1)$
$|\overrightarrow{LA}| = 2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5} \cdot 0{,}8\,\text{m} \approx 3{,}6\,\text{m}$

g A und B haben vom Schnittpunkt der Diagonalen des Rechtecks ABCD den gleichen Abstand. Die Strecke $\overline{AB}$ verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene, die Strecke, die das Metallrohr darstellt, senkrecht dazu. Damit haben A und B von der Strecke, die das Metallrohr darstellt, den gleichen Abstand.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	X		X			I				I		X		
b	4	X		X			I				I		X		
c	4	X		X							II			X	
d	3	X	X	X					I		II	I		X	
e	5		X	X				III	III	II					X
f	4	X	X	X				II			I	I		X	
g	3			X			III	III				II			X

2017 – WTR 3

Eine Radarstation überwacht die Bewegung eines Flugzeugs. Die Bewegung kann modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, dessen x_1x_2-Ebene die Horizontale beschreibt; eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer in der Realität. Der Standort der Radarstation wird durch den Punkt $R(18\,|\,0\,|\,-1)$ beschrieben.

Zu Beginn der Beobachtung um 14.00 Uhr wird die Position des Flugzeugs durch den Punkt $A(0|0|0)$ beschrieben. Anschließend bewegt es sich im Modell entlang einer Geraden durch den Punkt $B(8|4|1)$, der die Position um 14.02 Uhr darstellt. Ab 14.14 Uhr fliegt das Flugzeug in gleicher Himmelsrichtung horizontal weiter; im Modell bleibt es dabei in der Ebene, die die Punkte A und B enthält und zur x_1x_2-Ebene senkrecht steht. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass das Flugzeug von 14.00 Uhr bis 14.14 Uhr mit konstanter Geschwindigkeit fliegt.

a Berechnen Sie für die Zeit bis 14.14 Uhr den Steigungswinkel der Flugbahn gegenüber der Horizontalen. Geben Sie die Koordinaten des Punkts an, der die Position des Flugzeugs um 14.10 Uhr darstellt. 4

b Die Abbildung zeigt schematisch die Flugbahn des Flugzeugs sowie die Horizontale. Zeichnen Sie die Positionen des Flugzeugs zu den Zeitpunkten 14.02 Uhr und 14.10 Uhr ein. 2

c Ermitteln Sie für die Zeit bis 14.14 Uhr die Geschwindigkeit des Flugzeugs in Kilometer pro Stunde. 2

d Geben Sie eine Gleichung der Strecke an, die die Flugbahn von 14.00 Uhr bis 14.14 Uhr beschreibt. 2

Zu einem bestimmten Zeitpunkt zwischen 14.00 Uhr und 14.14 Uhr ist die Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation am geringsten. Die bis dahin seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit soll in Minuten bestimmt werden. Dafür werden zwei verschiedene Lösungsansätze I und II betrachtet:

I $$d(s)=\left|\begin{pmatrix}18-8s\\-4s\\-1-s\end{pmatrix}\right|=\sqrt{81s^2-286s+325}$$

$$d'(s)=0$$

II $$\begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}18-8s\\-4s\\-1-s\end{pmatrix}=0$$

e Erläutern Sie jeden der beiden Lösungsansätze. 4

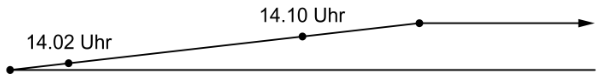
f Setzen Sie einen der beiden Ansätze bis zur Lösung fort und bestimmen Sie die geringste Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation. 4

g Ist das Flugzeug mehr als 70 km von der Radarstation entfernt, so kann es von dieser nicht mehr erfasst werden. Die Position, an der das Flugzeug nach 14.14 Uhr den Erfassungsbereich der Radarstation verlässt, wird im Modell durch einen Punkt dargestellt. Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Punkts. 7

Erwartungshorizont

a
Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \vec{n}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}$, d. h. $\alpha \approx 6{,}4°$

Koordinaten des Punkts: $\left(40 \middle| 20 \middle| 5\right)$

b


c $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot 60 = 270$, d. h. die Geschwindigkeit des Flugzeugs beträgt $270 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

d
$\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $0 \le s \le 7$

e I: Die Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation kann in Abhängigkeit von der Zeit im Modell durch eine Funktion d beschrieben werden. Dabei liefert $d(s)$ die Entfernung $2s$ Minuten nach Beobachtungsbeginn. Die geringste Entfernung lässt sich mithilfe der Differentialrechnung bestimmen.

II: Ist die Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation am geringsten, so stehen der Richtungsvektor der Geraden, entlang derer sich das Flugzeug im Modell bewegt, und der Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten, die das Flugzeug und die Radarstation im Modell darstellen, zueinander senkrecht. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist dann null.

f $d'(s) = 0 \Leftrightarrow 162s - 286 = 0 \Leftrightarrow s = \frac{143}{81}$, d. h. etwa 3,5 Minuten nach Beobachtungsbeginn ist die Entfernung am geringsten.

$d\left(\frac{143}{81}\right) \approx 8{,}5$; d. h. die geringste Entfernung beträgt etwa 8,5 km.

g
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 56 \\ 28 \\ 7 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u \in \mathrm{IR}^+$

Für $u \in \mathrm{IR}^+$ liefert $\left|\begin{pmatrix} 56 + 8u - 18 \\ 28 + 4u \\ 7 + 1 \end{pmatrix}\right| = 70 \Leftrightarrow 80u^2 + 832u + 2292 = 4900:\ u \approx 2{,}5$

Damit: $x_1 \approx 76$, $x_2 \approx 38$, $x_3 = 7$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4	X	X	X					I		II	I		X	
b	2		X	X			I		I	I			X		
c	2	X	X	X				I	I		I		X		
d	2	X		X			I		I		I		X		
e	4	X	X	X			III		III			III			X
f	4	X	X	X					II		III				X
g	7	X	X	X				II	II		II			X	

2017 – CAS 2

Ein geschlossenes Zelt, das auf horizontalem Untergrund steht, hat die Form einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Die seitlichen Kanten der Zeltwände werden durch vier gleich lange Stangen gebildet. Das Zelt ist 3,90 m hoch, die Seitenlänge des Zeltbodens beträgt 5,00 m.

Das Zelt kann in einem kartesischen Koordinatensystem durch eine Pyramide ABCDS mit der Spitze S modellhaft dargestellt werden. Der Punkt A liegt im Koordinatenursprung, B auf dem positiven Teil der x-Achse und D auf dem positiven Teil der y-Achse. Der Punkt C hat die Koordinaten $(5\,|\,5\,|\,0)$, der Mittelpunkt der Grundfläche wird mit M bezeichnet. Das Dreieck ABS liegt in der Ebene $E: -39y + 25z = 0$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

a Geben Sie die Koordinaten der Punkte B, D, M und S an und zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem gemäß Abbildung 1 ein. 5

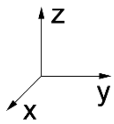


Abb. 1

b Jeweils zwei benachbarte Zeltwände schließen im Inneren des Zelts einen stumpfen Winkel ein. Ermitteln Sie dessen Größe. 4

c Im Zelt ist eine Lichtquelle so aufgehängt, dass sie von jeder der vier Wände einen Abstand von 80 cm hat. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, der die Lichtquelle im Modell darstellt. 4

d Der Ortsvektor eines Punkts P lässt sich in der Form $\overrightarrow{OP} = r \cdot \overrightarrow{OC} + s \cdot \overrightarrow{OS}$ mit $r, s \in [0;1]$ und $r + s = 1$ darstellen. Weisen Sie nach, dass P auf der Strecke $\overline{CS}$ liegt. 3

Betrachtet wird die Zeltwand, die im Modell durch das Dreieck CDS dargestellt wird. Ein Teil dieser Zeltwand kann mithilfe zweier weiterer Stangen zu einem horizontalen Vordach aufgespannt werden (vgl. Abbildung 2).

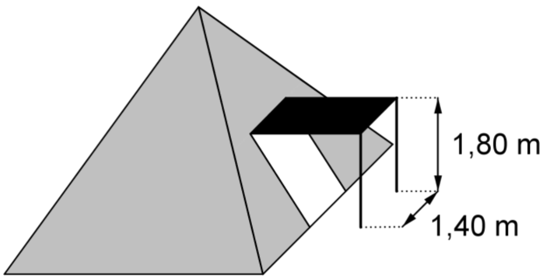


Abb. 2

Die dadurch entstehende Öffnung in der Zeltwand kann im Modell durch ein Rechteck dargestellt werden. Eine Seite dieses Rechtecks liegt so auf der Strecke $\overline{CD}$, dass der eine Endpunkt dieser Seite von C ebenso weit entfernt ist wie der andere Endpunkt von D.

e Weisen Sie nach, dass die Länge des Vordachs etwa 2,14 m beträgt. 4

Alle Punkte derjenigen Kante des Vordachs, an deren Enden die beiden Stangen befestigt sind, haben im Modell die gleiche y-Koordinate. Bestimmen Sie diese y-Koordinate.

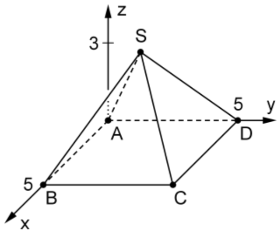
(zur Kontrolle: Die y-Koordinate beträgt etwa 5,98.)

f Auf das Zelt treffendes Sonnenlicht lässt sich im Modell zu einem bestimmten Zeitpunkt durch parallele Geraden mit einem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4{,}2 \\ a \end{pmatrix}$ beschreiben. Zu diesem Zeitpunkt trifft Sonnenlicht durch ein kleines Loch im horizontalen Vordach genau auf den Mittelpunkt des Zeltbodens. 5

Für a kommen verschiedene ganzzahlige Werte infrage. Ermitteln Sie einen dieser Werte und geben Sie die Koordinaten des zugehörigen Punkts an, der im Modell eine mögliche Position des Lochs im Vordach darstellt.

Erwartungshorizont

1 a $B(5|0|0)$,
$D(0|5|0)$,
$M(2{,}5|2{,}5|0)$,
$S(2{,}5|2{,}5|3{,}9)$



b Ein Normalenvektor der Ebene, in der das Dreieck ADS liegt, ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}-39\\0\\25\end{pmatrix}$.

Mit $\vec{m}=\begin{pmatrix}0\\-39\\25\end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\varphi=\frac{\vec{m}\circ\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}$, d. h. $\varphi\approx 73{,}1°$

Die Größe des Winkels beträgt etwa $180°-73{,}1°=106{,}9°$.

c Koordinaten des Punkts: $(2{,}5|2{,}5|z_L)$

Für $z_L\leq 3{,}9$ liefert $\left|\frac{-39\cdot 2{,}5+25\cdot z_L}{\sqrt{39^2+25^2}}\right|=0{,}8$: $z_L\approx 2{,}4$

d $\overrightarrow{OP}=(1-s)\cdot\overrightarrow{OC}+s\cdot\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OC}+s\cdot\left(\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OC}+s\cdot\overrightarrow{CS}$

Da $s\in[0;1]$, liegt P auf der Strecke $\overline{CS}$.

e Die horizontale Entfernung von oberer und unterer Kante der Öffnung in der Zeltwand beträgt $\frac{1{,}8}{3{,}9}\cdot 2{,}5\,\text{m}$.

Damit ergibt sich für die Länge des Vordachs: $\sqrt{1{,}80^2+\left(\frac{1{,}8}{3{,}9}\cdot 2{,}5\right)^2}\approx 2{,}14$

y-Koordinate: $5-\frac{1{,}8}{3{,}9}\cdot 2{,}5+\sqrt{1{,}80^2+\left(\frac{1{,}8}{3{,}9}\cdot 2{,}5\right)^2}\approx 5{,}98$

f Bezeichnet man die Koordinaten des gesuchten Punkts mit x_P, y_P und z_P, so muss gelten:

- $x_P\in[1{,}8;3{,}2]$
- $y_P\in[b;c]$, $b=5-\frac{1{,}8}{3{,}9}\cdot 2{,}5\approx 3{,}85$, $c\approx 5{,}98$
- $z_P=1{,}8$
- $\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\\-4{,}2\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_P\\y_P\\1{,}8\end{pmatrix}$, $t\in\mathbb{R}$

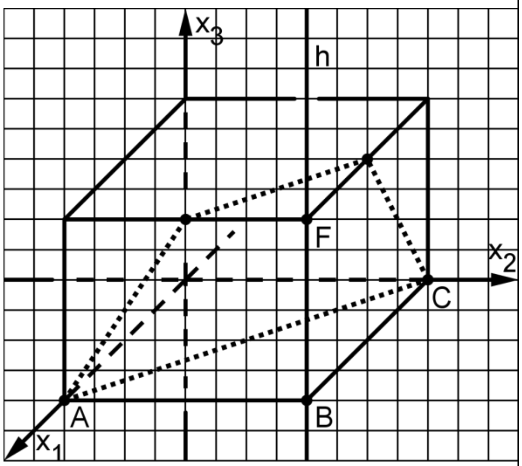
Probieren liefert für $a=-3$: $x_P=2{,}2$, $y_P=5{,}02$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	5	X		X					I	I		I	X		
b	4	X	X	X				II	I		II			X	
c	4	X	X	X				II	II		II			X	
d	3			X			III	III			III				X
e	4		X	X				II			II	II		X	
f	5	X		X			II	III	II						X

2018 – WTR 1

Die Punkte $A(4|0|0)$, $B(4|4|0)$, $C(0|4|0)$ und $F(4|4|3)$ sind Eckpunkte des abgebildeten Quaders. Die Gerade h verläuft durch B und F.



a Begründen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks an. 3

b Geben Sie eine Gleichung der Gerade an, die durch A und C verläuft. Begründen Sie, dass diese Gerade windschief zur Gerade h ist. 3

Die Punkte der Gerade h lassen sich durch $P_t(4|4|t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen. Für jeden Wert von t liegen A, C und P_t in der Ebene $E_t: t \cdot x_1 + t \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 - 4t = 0$.

c Ermitteln Sie diejenigen Werte von t, für die die zugehörige Ebene E_t mit der x_1x_2-Ebene einen Winkel der Größe 60° einschließt. 4

Der abgebildete Quader wird durch eine der Ebenen E_t in zwei Teilkörper zerlegt. Die Seiten der Schnittfigur dieser Ebene und des Quaders sind in der Abbildung gepunktet dargestellt.

d Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung ermitteln kann, dass $t = 6$ ist. 3

e Berechnen Sie das Volumen desjenigen der beiden Teilkörper, zu dem der Punkt B gehört, und erläutern Sie Ihr Vorgehen. 5

f Es gibt Werte von t, für die die Schnittfigur des Quaders und der Ebene E_t die Form eines Dreiecks hat. Geben Sie alle diese Werte von t an und beschreiben Sie in Abhängigkeit von t die Lage der Eckpunkte des Dreiecks. 4

g Die folgende Aussage stellt die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit den bisher betrachteten geometrischen Objekten dar: 3

$$\left|\frac{t \cdot 4 + t \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 4t}{\sqrt{t^2 + t^2 + 16}}\right| = 2 \Leftrightarrow t = -2\sqrt{2} \vee t = 2\sqrt{2}$$

Formulieren Sie eine dazu passende Aufgabenstellung.

Erwartungshorizont

a Den Koordinaten der gegebenen Punkte ist zu entnehmen, dass das Viereck OABC ein Quadrat ist. Damit ist das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig.

Flächeninhalt: 8

b $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ u \in \mathbb{R}$

Die Gerade h schneidet die x_1x_2-Ebene im Punkt B. Die Gerade durch A und C liegt in der x_1x_2-Ebene und verläuft nicht durch B.

c $\cos(60°) = \frac{\left|\begin{pmatrix} t \\ t \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{t^2 + t^2 + 16}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{2t^2 + 16}} \Leftrightarrow 2t^2 + 16 = 64 \Leftrightarrow t = -\sqrt{24} \vee t = \sqrt{24}$

d Verlängert man eine passende Seite der Schnittfigur so, dass die Verlängerung die Gerade h schneidet, so stimmt die x_3-Koordinate des Schnittpunkts mit dem Wert von t überein.

e Volumen der Pyramide $ABCP_6$: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 = 16$

Volumen der Pyramide, die den betrachteten Teilkörper zur Pyramide $ABCP_6$ ergänzt: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2$

Volumen des betrachteten Teilkörpers: $16 - 2 = 14$

f $t \in [-3;3] \setminus \{0\}$

Zwei der Eckpunkte sind stets die Punkte A und C. Für $0 < t \leq 3$ liegt der dritte Eckpunkt auf der Seitenkante $\overline{BF}$ des Quaders, für $-3 \leq t < 0$ auf der gegenüberliegenden Seitenkante.

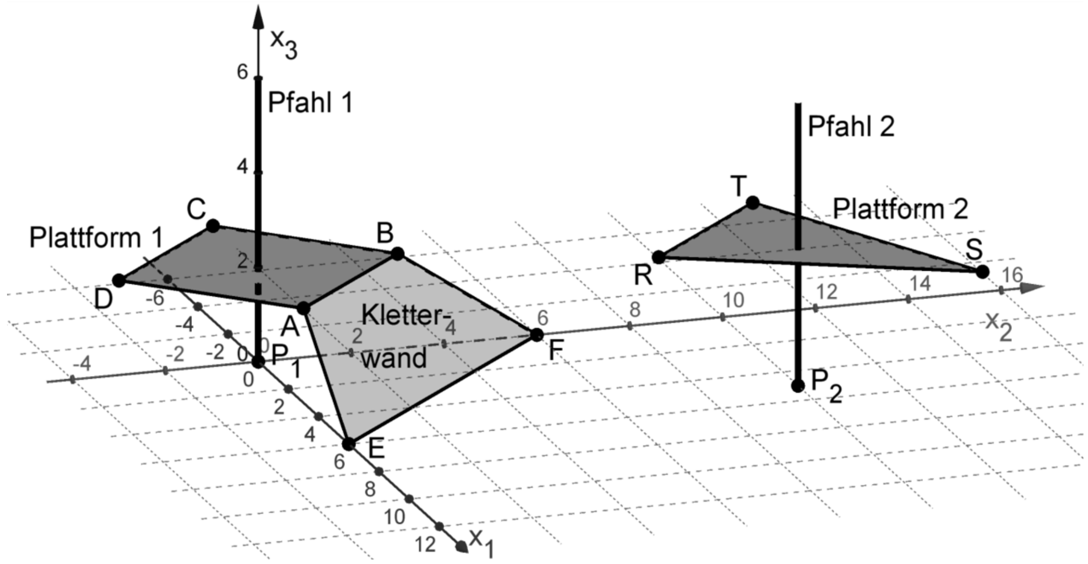
g Bestimmen Sie diejenigen Werte von t, für die B und E_t den Abstand 2 voneinander haben.

<u>Standardbezug</u>

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3		X	X			I			I	I		X		
b	3	X		X			I				I	I	X		
c	4	X	X	X				II			II			X	
d	3			X			II			II		II		X	
e	5		X	X			II	II			I			X	
f	4			X				III		III		II			X
g	3	X	X	X			III			III	II				X

2018 – WTR 2

Die Abbildung zeigt modellhaft wesentliche Elemente einer Kletteranlage: zwei horizontale Plattformen, die jeweils um einen vertikal stehenden Pfahl gebaut sind, sowie eine Kletterwand, die an einer der beiden Plattformen angebracht ist.



Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund; eine Längeneinheit entspricht 1 m in der Wirklichkeit. Die Punkte, in denen die Pfähle aus dem Untergrund austreten, werden durch $P_1(0|0|0)$ und $P_2(5|10|0)$ dargestellt. Außerdem sind die Koordinaten der Eckpunkte $A(3|0|2)$, $B(0|3|2)$, $E(6|0|0)$, $F(0|6|0)$, $R(5|7|3)$, $S(8|13|3)$ und $T(2|10|3)$ gegeben. Die Materialstärke aller Bauteile der Anlage soll vernachlässigt werden.

a In den Mittelpunkten der oberen und unteren Kante der Kletterwand sind die Enden eines Seils befestigt, das 20 % länger ist als der Abstand der genannten Mittelpunkte. Berechnen Sie die Länge des Seils. 3

Die Punkte A, B, E und F liegen in der Ebene $L: 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 12 = 0$.

b Zeigen Sie, dass die Kletterwand die Form eines Trapezes hat. 2

c Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Kletterwand mit dem Untergrund einschließt. 3

d Auf die Anlage treffendes Sonnenlicht kann im Modell durch parallele Geraden beschrieben werden. Die Eckpunkte der Plattform 2 werden durch R, S und T dargestellt, die zugehörigen Eckpunkte des Schattens dieser Plattform durch $R'(4|2|0)$, S' bzw. $T'(1|5|0)$. Zeigen Sie rechnerisch, dass T' auf der Strecke $\overline{EF}$ liegt. Berechnen Sie die Koordinaten von S' und stellen Sie den Schatten der Plattform 2 in der obigen Abbildung grafisch dar. 6

Über ein Kletternetz kann man von einer Plattform zur anderen gelangen. Die vier Eckpunkte des Netzes sind an den beiden Pfählen befestigt; einer der beiden unteren Eckpunkte am Pfahl 1 auf der Höhe der zugehörigen Plattform, der andere untere Eckpunkt oberhalb der Plattform 2. An jedem Pfahl beträgt der Abstand der beiden dort befestigten Eckpunkte des Netzes 1,80 m. Das Netz ist so gespannt, dass davon ausgegangen werden kann, dass es die Form eines ebenen Vierecks hat.

e Berechnen Sie den Flächeninhalt des Netzes. 3

f Die untere Netzkante berührt die Plattform 2 an der Seite, die durch $\overline{RT}$ dargestellt wird. Betrachtet wird der untere Eckpunkt des Netzes, der oberhalb der Plattform 2 befestigt ist. Berechnen Sie den Abstand dieses Eckpunkts von der Plattform 2. 8

Erwartungshorizont

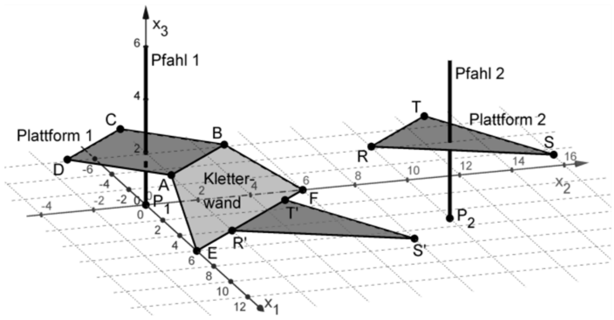
a Die Mittelpunkte von $\overline{AB}$ und $\overline{EF}$ sind $M_1(1{,}5\,|\,1{,}5\,|\,2)$ bzw. $M_2(3\,|\,3\,|\,0)$.

$1{,}2 \cdot \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = 1{,}2 \cdot \sqrt{1{,}5^2 + 1{,}5^2 + 4} \approx 3{,}5$, d. h. das Seil ist etwa 3,5 m lang.

b $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$

c Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{m} \circ \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \dfrac{3}{\sqrt{17}}$, d. h. $\alpha \approx 43°$

d $\overrightarrow{ET'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot \overrightarrow{T'F}$



$\overrightarrow{P_1S} + \overrightarrow{RR'} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S'(7\,|\,8\,|\,0)$

e $1{,}8 \cdot \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 9\sqrt{5}$

Das Netz hat einen Flächeninhalt von etwa $20\,\text{m}^2$.

f Bezeichnet man den Punkt, der den betrachteten Eckpunkt darstellt, mit U und dessen z-Koordinate mit z_U, so hat die Gleichung der Gerade durch $(0\,|\,0\,|\,2)$ und U die Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ z_U - 2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Gerade durch R und T: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$

Aus $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ z_U - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ resultiert das folgende Gleichungssystem:

I $5\lambda = 5 - 3\mu$ II $10\lambda = 7 + 3\mu$ III $2 + (z_U - 2) \cdot \lambda = 3$

Aus I und II ergibt sich $\lambda = 0{,}8$ und damit $z_U = 3{,}25$, d. h. der Abstand beträgt 25 cm.

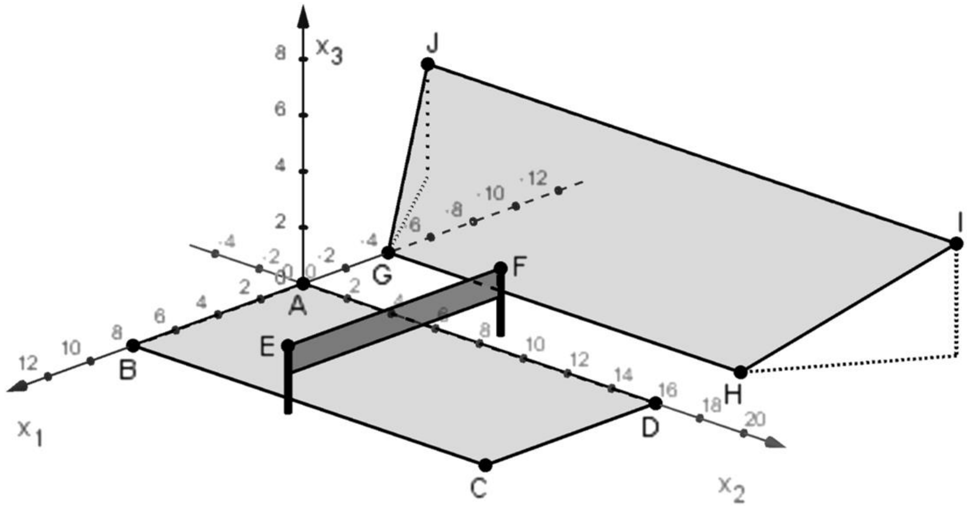
Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	3	X	X	X					I	I	I		X		
b	2	X		X			I		I		I		X		
c	3	X	X	X				I	I		II			X	
d	6	X		X			II			I	II			X	
e	3	X	X	X					I		I	II		X	
f	8	X	X	X				III	III		II				X

2018 – WTR 3

Die beiden quadratischen Spielhälften eines Beachvolleyballfelds sind jeweils 8 m lang und breit. Sie werden durch ein Netz voneinander getrennt, dessen obere Kante 2,4 m über dem horizontalen Sandboden verläuft. Das Netz ist an zwei vertikal stehenden Pfosten befestigt, die 10 m voneinander entfernt sind. Die beiden Pfosten haben den gleichen Abstand von den seitlichen Begrenzungslinien des Spielfelds.

Für ein Computerspiel werden das Spielfeld, das Netz und eine Tribüne vereinfacht, aber maßstabsgetreu in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt (vgl. Abbildung). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität; die x_1x_2-Ebene beschreibt den Sandboden.



Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte des Spielfelds. Die beiden Strecken, die die Pfosten abbilden, enden in den Punkten E und $F(-1|8|2,4)$ an der Oberkante des Netzes. Die Tribüne wird durch ein Viereck dargestellt, dessen Eckpunkte $G(-4|0|0)$, $H(-4|16|0)$, $I(-10|20|4)$ und $J(-10|-4|4)$ in der Ebene $L: 2x_1 + 3x_3 = -8$ liegen.

a Zeigen Sie, dass die Tribüne die Form eines Trapezes hat, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind. 3

b In der Realität nimmt man an, dass pro Person $0{,}5\,m^2$ der Tribüne eingenommen werden. Ermitteln Sie die Anzahl der Zuschauer, die im Computerspiel dargestellt werden müssen, um eine voll besetzte Tribüne zu zeigen. 5

c Berechnen Sie den Abstand des Punkts F von der Ebene L. 3

d Begründen Sie anhand einer geeigneten Zeichnung, dass kein Punkt des Vierecks, das die Tribüne darstellt, vom Punkt F den gleichen Abstand wie die Ebene L hat. 4

Im Folgenden wird der Ball im Modell vereinfachend als punktförmig angenommen.

e Nach einem Angriffsschlag bewegt sich der Ball vom Punkt $(2|7{,}5|3)$ aus geradlinig in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Ball das Netz berührt. 4

Ein Aufschlag wird hinter der parallel zum Netz verlaufenden Begrenzungslinie der von der Tribüne aus gesehen rechten Spielfeldhälfte ausgeführt. Anschließend kann die Bahn des Balls mithilfe der Punkte $X_t(3|12t-1|-5t^2+4t+2{,}8)$ beschrieben werden;

dabei ist t die seit dem Schlag vergangene Zeit in Sekunden. Auf dieser Bahn überfliegt der Ball das Netz.

f Begründen Sie, dass sich der Ball in einer Ebene bewegt, und geben Sie eine Gleichung dieser Ebene an. 2

g Untersuchen Sie, ob der Ball innerhalb des Spielfelds auf dem Boden auftrifft, wenn er nach dem Aufschlag von keinem Spieler berührt wird. 4

Erwartungshorizont

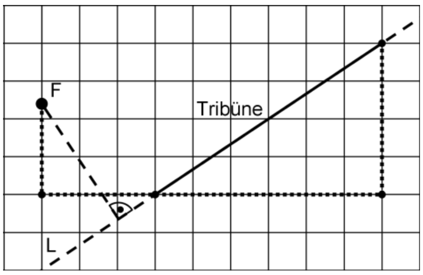
a $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -24 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind kollinear und es gilt $\left|\overrightarrow{GJ}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\overrightarrow{HI}\right|$.

b Mittelpunkte der Seiten GH und IJ sind $M(-4\,|\,8\,|\,0)$ bzw. $N(-10\,|\,8\,|\,4)$.

$\frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{GH}\right| + \left|\overrightarrow{IJ}\right|\right) \cdot \left|\overrightarrow{MN}\right| \approx 144$, $\frac{144}{0{,}5} = 288$

c $\frac{|2\cdot(-1)+3\cdot 2{,}4+8|}{\sqrt{13}} \approx 3{,}7$

d



Der Fußpunkt des Lots von F auf L liegt außerhalb des Vierecks, das die Tribüne darstellt. Damit sind die Abstände aller Punkte dieses Vierecks vom Punkt F größer als der Abstand der Ebene L vom Punkt F.

e Der Ball bewegt sich vom Abschlagpunkt bis zur Ebene, in der sich das Netz befindet, 0,5 in x_2-Richtung und $\frac{0{,}5}{4} \cdot 3 = 0{,}375$ in negative x_3-Richtung.

$3 - 0{,}375 = 2{,}625 > 2{,}4$, d. h. der Ball berührt das Netz nicht.

f Alle Punkte X_t haben die gleiche x_1-Koordinate.

Gleichung der Ebene: $x_1 = 3$

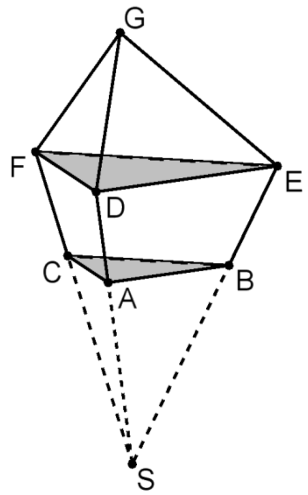
g Für $t \geq 0$ liefert $-5t^2 + 4t + 2{,}8 = 0$: $t = \frac{-4-\sqrt{4^2-4\cdot(-5)\cdot 2{,}8}}{2\cdot(-5)} \approx 1{,}25$

Für den Punkt X_t mit der x_3-Koordinate 0 gilt $x_2 \approx 12 \cdot 1{,}25 - 1 = 14$. Der Ball trifft also innerhalb des Spielfelds auf dem Boden auf.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3		X	X			I				I	I	X		
b	5		X	X				II	II		I			X	
c	3		X	X							II			X	
d	4		X	X			II			III		II			X
e	4	X		X				II	II		I			X	
f	2			X			I		I			I	X		
g	4	X		X				III	III		II				X

2018 – CAS 1



Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper ABCDEFG dargestellt werden. Die obere Etage des Museums entspricht dabei der Pyramide DEFG, die untere Etage dem Körper ABCDEF, der Teil der Pyramide DEFS ist. Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die Horizontale. Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene.

In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte: $A(-5|5|0)$, $B(-5|25|0)$, $D(0|0|15)$, $E(0|30|15)$, $F(-25|5|15)$ und $G(-10|10|35)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

a Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von S: 4

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\-5\\-15\end{pmatrix}\Leftrightarrow r=s=3$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15\\15\\-30\end{pmatrix}\text{, d. h. } S(-15|15|-30)$$

Erläutern Sie das dargestellte Vorgehen.

b Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist. 3

c Berechnen Sie für das Dreieck DEF die Größe des Innenwinkels bei E sowie die Länge der Höhe zur Seite $\overline{EF}$. 4

d Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für $100\,m^3$ Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt. Weisen Sie nach, dass für den Betrieb der Anlage eine Leistung von 25 Kilowatt ausreichend ist. 4

e Weisen Sie nach, dass sich die Gerade AG und die Ebene, in der das Dreieck DEF liegt, im Punkt $R\left(-\frac{50}{7}\middle|\frac{50}{7}\middle|15\right)$ schneiden. 3

f An einer Metallstange, die durch die Strecke $\overline{RG}$ dargestellt wird, ist ein Scheinwerfer befestigt, dessen Größe vernachlässigt werden soll. Der Scheinwerfer beleuchtet aus einer Entfernung von 5 m diejenige Wand, die im Modell durch das Dreieck EFG dargestellt wird. Berechnen Sie die Koordinaten des Punkts, der die Position des Scheinwerfers im Modell beschreibt. 7

Erwartungshorizont

a

Alle Punkte der Gerade AD lassen sich durch $\begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\\-15\end{pmatrix}$ mit $r\in\mathbb{R}$ darstellen,

alle Punkte der Gerade BE durch $\begin{pmatrix}0\\30\\15\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\-5\\-15\end{pmatrix}$ mit $s\in\mathbb{R}$. Der erste Schritt des Vorgehens liefert die Werte von r und s, die zum Schnittpunkt S der beiden Geraden gehören. Im zweiten Schritt werden die Koordinaten von S als Punkt der Gerade AD ermittelt.

b $\overrightarrow{DE} \circ \overrightarrow{DF} \neq 0$, $\overrightarrow{DE} \circ \overrightarrow{EF} \neq 0$, $\overrightarrow{DF} \circ \overrightarrow{EF} \neq 0$

c $\cos\varepsilon = \frac{\overrightarrow{ED} \circ \overrightarrow{EF}}{\left|\overrightarrow{ED}\right| \cdot \left|\overrightarrow{EF}\right|}$, d. h. $\varepsilon = 45°$

Länge der Höhe: $h \cdot \left|\overrightarrow{EF}\right| = \left|\overrightarrow{DE} \circ \overrightarrow{EF}\right| \Leftrightarrow h = 15\sqrt{2}$

d Im Dreieck DEF hat die Höhe von F auf die Seite $\overline{DE}$ die Länge 25.

Volumen der Pyramide DEFG: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{DE}\right| \cdot 25 \cdot (35 - 15) = 2500$

$25 \cdot 0{,}8\,\text{kW} = 20\,\text{kW}$, d. h. die Leistung ist ausreichend.

e R hat wie D, E und F die x_3-Koordinate 15.

Gleichung der Gerade AG: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 35 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Die Koordinaten von R erfüllen diese Gleichung für $t = \frac{3}{7}$.

f Das aus $\vec{x} = \overrightarrow{OE} + u \cdot \overrightarrow{EF} + v \cdot \overrightarrow{EG}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ resultierende Gleichungssystem

I $x_1 = -25u - 10v$ II $x_2 = 30 - 25u - 20v$ III $x_3 = 15 + 20v$

liefert für die Ebene, in der das Dreieck EFG liegt: $2x_1 - 2x_2 - x_3 + 75 = 0$

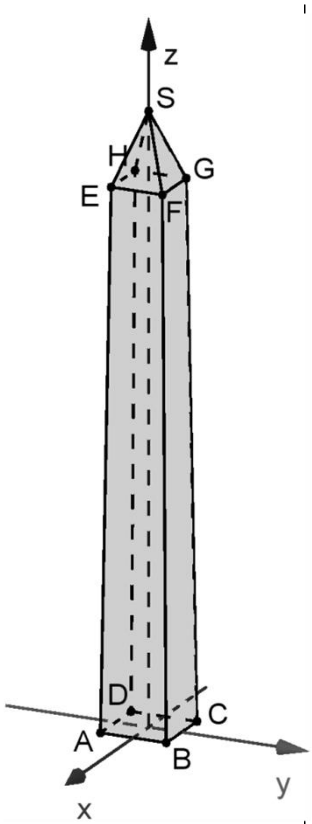
Für $t \leq 1$ gilt: $\left|\frac{2 \cdot (-5 - 5t) - 2 \cdot (5 + 5t) - 35t + 75}{3}\right| = 5 \Leftrightarrow t = \frac{8}{11}$

Koordinaten des gesuchten Punkts: $x_1 = -\frac{95}{11}$, $x_2 = \frac{95}{11}$, $x_3 = \frac{280}{11}$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	X		X			II			II		II		X	
b	3	X	X	X			I		I		I		X		
c	4		X	X				I			II			X	
d	4		X	X				II	II		I			X	
e	3	X		X			I				I		X		
f	7	X	X	X				III	II		III				X

2018 – CAS 2



Die Abbildung zeigt – nicht maßstabsgetreu – ein Modell eines Obelisken. Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem beschreibt die xy-Ebene den ebenen Untergrund, auf dem der Obelisk steht; eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Der untere Teilkörper ABCDEFGH mit $B(0{,}45\,|\,0{,}45\,|\,0)$ ist ein Stumpf einer geraden Pyramide. Der Mittelpunkt des Quadrats ABCD ist der Koordinatenursprung. Das Quadrat EFGH ist parallel zur xy-Ebene.

Der obere Teilkörper EFGHS mit $E(0{,}35\,|\,-0{,}35\,|\,7{,}16)$ ist eine gerade Pyramide. Der Punkt S liegt auf der z-Achse und stellt die Spitze des Obelisken dar.

a Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Gerade AE mit der z-Achse. 3

(zur Kontrolle: z-Koordinate des Schnittpunkts: 32,22)

b Berechnen Sie die Größe der Neigungswinkel der Seitenkanten des unteren Teilkörpers gegenüber dem Untergrund. 2

c Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer der Seitenflächen des unteren Teilkörpers. 4

d Der untere Teilkörper des Obelisken besteht aus Granit. Ein Kubikmeter des verwendeten Materials hat eine Masse von 2,6 Tonnen. Bestimmen Sie die Masse des unteren Teilkörpers. 5

e Entscheiden Sie für jede der folgenden Gleichungen I bis IV, ob sie eine Symmetrieebene des Obelisken beschreibt. Begründen Sie für eine der Gleichungen, dass Sie keine solche Ebene darstellt. 4

I $x = 0{,}45$ II $y = 0$ III $x - y = 0$ IV $x - z = 0$

Auf den Obelisken treffendes Sonnenlicht kann im Modell durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

f Begründen Sie, dass der Schatten der Spitze des Obelisken nur dann auf dem Untergrund liegt, wenn der obere Teilkörper des Obelisken ausreichend hoch ist. 2

g Der Abstand des auf dem Untergrund liegenden Schattens der Spitze des Obelisken von dem Punkt, der im Modell durch B dargestellt wird, beträgt 5,1 Meter. Ermitteln Sie die Höhe des Obelisken. 5

Erwartungshorizont

a

Gerade durch A und E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}45 \\ -0{,}45 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 7{,}16 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$

Die x- und y-Koordinate des Schnittpunkts sind jeweils 0. Für diesen Punkt gilt also $r = 4{,}5$, d. h. $z = 4{,}5 \cdot 7{,}16 = 32{,}22$.

b Es gilt: $\tan\alpha = \frac{32{,}22}{0{,}45\cdot\sqrt{2}}$, d. h. $\alpha \approx 89°$

c $\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{EF}\right|\right)\cdot\left|\begin{pmatrix}-0{,}1\\0\\7{,}16\end{pmatrix}\right| \approx 5{,}7$, d. h. der Flächeninhalt beträgt etwa $5{,}7\,\text{m}^2$.

d $\left(\frac{1}{3}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\cdot 32{,}22 - \frac{1}{3}\cdot\left|\overrightarrow{EF}\right|^2\cdot(32{,}22-7{,}61)\right)\cdot 2{,}6\,\text{t} \approx 12\,\text{t}$

e Die Gleichungen II und III beschreiben Symmetrieebenen, die Gleichungen I und IV nicht.

Die Gleichung $x = 0{,}45$ stellt keine Symmetrieebene dar, da das Modell des Obelisken keine Punkte enthält, deren x-Koordinate größer als 0,45 ist.

f Der Schatten der Spitze des Obelisken liegt nur dann auf dem Untergrund, wenn der Winkel zwischen der durch $\overline{FS}$ dargestellten Seitenkante gegenüber dem Untergrund größer ist als der Winkel, unter dem das Sonnenlicht auf den Untergrund trifft.

g Gerade durch S mit dem Richtungsvektor $\vec{v}$: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\z_S\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$

$z_S - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{z_S}{2}$ liefert als Schnittpunkt von g mit der xy-Ebene: $S'\left(\frac{z_S}{2}\,|\,\frac{z_S}{2}\,|\,0\right)$

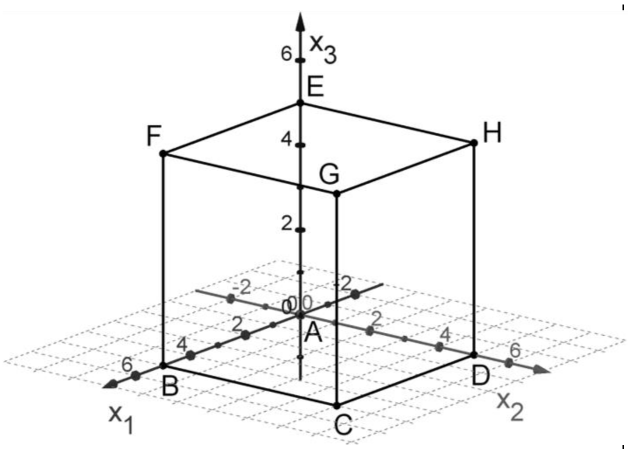
Für $z_S > 0$ liefert $\left|\overrightarrow{BS'}\right| = 5{,}1$: $z_S \approx 8{,}1$, d. h. die Höhe des Obelisken beträgt etwa $8{,}1\,\text{m}$.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	X		X							I		X		
b	2	X	X	X					I		I		X		
c	4	X	X	X				II	I		I			X	
d	5		X	X				I	II		II			X	
e	4			X			II		II	II				X	
f	2			X			III		III			II			X
g	5	X	X	X				III	II		II				X

2019 – WTR 1

Die Abbildung zeigt den Würfel ABCDEFGH mit $A(0|0|0)$ und $G(5|5|5)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten $I(5|0|1)$, $J(2|5|0)$, $K(0|5|2)$ und $L(1|0|5)$.



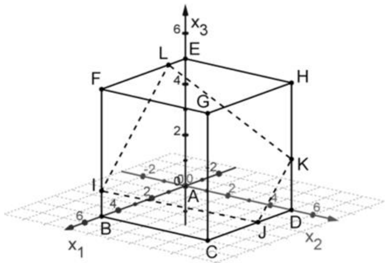
a	Zeichnen Sie das Viereck IJKL in die Abbildung ein.	2
b	Zeigen Sie, dass das Viereck IJKL ein Trapez ist, in dem zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.	3
c	Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform. *(zur Kontrolle: $T: 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$)*	4
d	Spiegelt man T an der Ebene mit der Gleichung $x_1 = 2{,}5$, so erhält man die Ebene T'. Zeigen Sie, dass T' durch die Gleichung $-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ beschrieben wird. Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem sich T und T' schneiden.	6
e	Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche IJKL liegt auf der Strecke $\overline{FG}$. Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide 2 sein kann.	4

Betrachtet wird die Schar der Geraden $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$.

f	Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$ liegt.	2
g	Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und T' zur betrachteten Schar gehört.	4

Erwartungshorizont

a



b $\overrightarrow{IL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind kollinear. Zudem gilt $\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \left|\overrightarrow{KL}\right|$.

c $T: \vec{x} = \overrightarrow{AI} + r \cdot \overrightarrow{IJ} + s \cdot \overrightarrow{JK} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ liefert das Gleichungssystem:

$\text{I} \quad x_1 = 5 - 3r - 2s \qquad \text{II} \quad x_2 = 5r \qquad \text{III} \quad x_3 = 1 - r + 2s$

Aus II ergibt sich $r = \frac{1}{5} x_2$ und damit aus III $s = \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{10} x_2 - \frac{1}{2}$.

Mit I ergibt sich: $x_1 = 5 - \frac{3}{5} x_2 - x_3 - \frac{1}{5} x_2 + 1 \Leftrightarrow 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30 = 0$

d Spiegelt man I, J und K an der Ebene mit der Gleichung $x_1 = 2{,}5$, so erhält man die Punkte $I'(0\,|\,0\,|\,1)$, $J'(3\,|\,5\,|\,0)$ und $K'(5\,|\,5\,|\,2)$. Es gilt $-5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 5 = 0$, $-5 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 0 - 5 = 0$ und $-5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 2 - 5 = 0$.

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{8}{33} \text{ liefert } \varphi \approx 76^\circ.$$

e Koordinaten der Spitze S: $(5\,|\,t\,|\,5)$, $t \in [0;5]$

Abstand von S zu T: $\frac{5 \cdot 5 + 4t + 5 \cdot 5 - 30}{\sqrt{66}} = \frac{4t+20}{\sqrt{66}}$

$\frac{4t+20}{\sqrt{66}} = 2$ liefert $t \approx -0{,}9$, d. h. die Höhe der Pyramide kann nicht 2 sein.

f Eine Gerade liegt genau dann in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3{,}5$, wenn für alle Punkte dieser Gerade $x_3 = 3{,}5$ gilt. Wegen $\frac{2}{a} \neq 0$ ist dies für keine Gerade der Schar der Fall.

g Die Koordinaten des Punkts $(2{,}5\,|\,0\,|\,3{,}5)$ erfüllen die Gleichungen von T und T'.

Für $a \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -40a + \frac{10}{a} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$, d. h. die Schnittgerade gehört zur Schar.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2			X						I			X		
b	3	X	X	X			I	I			I		X		
c	4	X		X							II	I		X	
d	6	X	X	X				II		II	II			X	
e	4	X	X	X			II	III			III				X
f	2	X		X			II			II		I		X	
g	4	X		X				III		II	II				X

2019 – WTR 2

Die Abbildung 1 stellt einen bearbeiteten Edelstein dar. Im verwendeten kartesischen Koordinatensystem, in dem eine Längeneinheit einem Millimeter in der Wirklichkeit entspricht, sind die Quadrate ABCD und EFGH mit $A(4\,|\,4\,|\,-1)$ und $E(2\,|\,2\,|\,0)$ parallel zur xy-Ebene. Die Mittelpunkte der beiden Quadrate sowie der Punkt $S(0\,|\,0\,|\,-5)$ liegen auf der z-Achse.

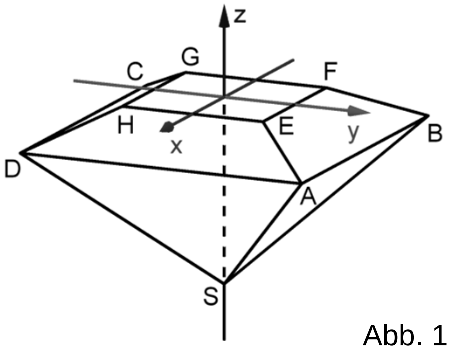


Abb. 1

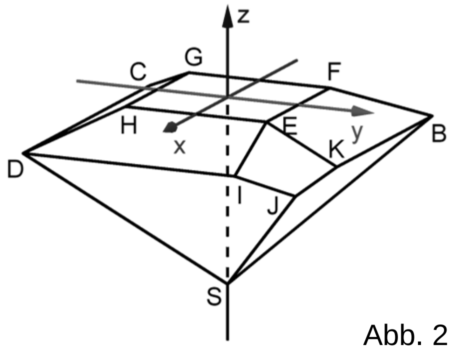


Abb. 2

Die Abbildung 2 stellt den Edelstein nach einem zusätzlichen Bearbeitungsschritt dar, bei dem ein pyramidenförmiges Stück abgeschliffen wurde. Das Viereck EIJK mit $I(4\,|\,2\,|\,-1)$ und $K(2\,|\,4\,|\,-1)$ ist ein Drachenviereck und liegt in der Ebene W.

1 a Die Gerade $u: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathrm{IR}$ verläuft durch A. Zeigen Sie, dass u auch durch S verläuft. 1

b Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene W in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $W: x + y + 2z - 4 = 0$)

c Berechnen Sie die Koordinaten von J. 3

(zur Kontrolle: $J(3{,}5\,|\,3{,}5\,|\,-1{,}5)$)

d Berechnen Sie das Volumen des Teils des Edelsteins, der durch den zusätzlichen Bearbeitungsschritt verloren ging. 6

e In weiteren Bearbeitungsschritten werden auch an den Eckpunkten des Edelsteins, die durch B, C und D dargestellt sind, pyramidenförmige Stücke gleicher Form und Größe abgeschliffen. Anschließend ist der Edelstein symmetrisch bezüglich der Achse, die im Modell durch die z-Achse beschrieben wird. Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist: 3

Eine der drei Flächen, die durch die weiteren Bearbeitungsschritte entstanden sind, liegt im Modell in der Ebene mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ mit } r,s \in \mathrm{IR}.$$

2 Ein Laserstrahl, der auf den Edelstein trifft, kann im Modell mithilfe einer Gerade beschrieben wer-

den, seine Richtung durch den Vektor $\overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -t \end{pmatrix}$

mit $t > 0$. Der Auftreffpunkt wird durch $M(0|0|0)$ dargestellt.

Beim Übergang in den Edelstein ändert der Laserstrahl seine Richtung. Die Abbildung 3 zeigt in der yz-Ebene schematisch den Verlauf des Strahls. Es gilt $\sin\alpha = 2\sin\beta$.

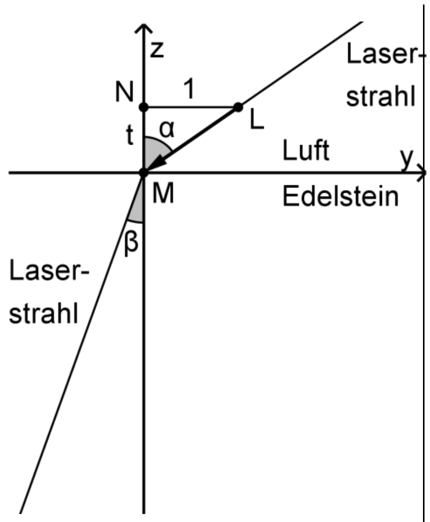


Abb. 3

a Bestimmen Sie für $\alpha = 45°$ ohne zu rechnen den zugehörigen Wert von t. 2

b Zeigen Sie, dass $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ gilt. 2

c Ermitteln Sie einen Vektor, der die Richtung des Laserstrahls im Edelstein in Abhängigkeit von t beschreibt. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 3. 4

Erwartungshorizont

1 a $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

b $\overrightarrow{EI} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{EK} = \vec{n} \circ \overrightarrow{EI} = 0$ liefern $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von W. Damit hat die Gleichung von W die Form $x + y + 2z + d = 0$. Mit $E \in W$ ergibt sich $d = -4$.

c $4 + r + 4 + r + 2 \cdot (-1 + r) - 4 = 0 \Leftrightarrow 4r = -2 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 3{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$, d. h. $J(3{,}5 | 3{,}5 | -1{,}5)$

d

Flächeninhalt des Drachenvierecks EIJK: $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{IK}\right| \cdot \left|\overrightarrow{EJ}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

Abstand von A zu W: $\frac{|4+4-2-4|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

Volumen der Pyramide EIJKA: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = 1$

Damit geht $1\,\text{mm}^3$ des Edelsteins verloren.

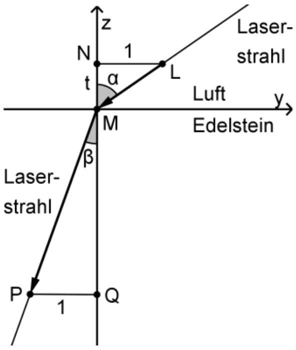
e Die Aussage ist richtig.

Begründung: $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punkts G. Die Ebene, in der das zugehörige Drachenviereck liegt, steht aufgrund der Symmetrie des Körpers senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dieser steht wegen $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ senkrecht zu den in der Gleichung auftretenden Richtungsvektoren.

2 a Für $\alpha = 45°$ ist das rechtwinklige Dreieck MLN gleichschenklig. Damit gilt $t = 1$.

b $\sin\alpha = \frac{1}{\overline{ML}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

c



Der gesuchte Vektor hat die Form $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\overline{MQ} \end{pmatrix}$.

Es gilt: $\sin\beta = \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+t^2}}$

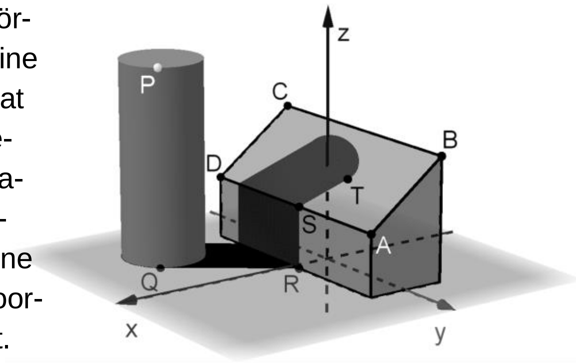
Damit: $\overline{MQ} = \sqrt{\left(2 \cdot \sqrt{1+t^2}\right)^2 - 1}$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	1	X		X							I		X		
b	4	X	X	X				I			II			X	
c	3	X		X				I			II	II		X	
d	6	X	X	X				II	I		II			X	
e	3	X	X	X			II	III		II					X
2 a	2		X	X			I			I		I	X		
b	2			X						I	I		X		
c	4	X	X	X				III		II	II				X

2019 – WTR 3

Die Abbildung zeigt modellhaft ein zylinderförmiges Silo, dessen Schatten teilweise auf eine Scheune fällt. Das Silo ist 9,6 m hoch und hat einen Durchmesser von 4 m. Die beiden Gebäude stehen senkrecht auf einem horizontalen Untergrund, der im dargestellten kartesischen Koordinatensystem durch die xy-Ebene beschrieben wird. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.



Die Dachfläche der Scheune wird durch das Viereck mit den Eckpunkten $A(2|6|3)$, $B(-2|6|6)$, $C(-2|-6|6)$ und $D(2|-6|3)$ dargestellt.

a Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist. 3

b Das Viereck ABCD liegt in der Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $E: 3x+4z=18$)

c Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem die Dachfläche der Scheune gegenüber der Horizontalen geneigt ist. 2

d Berechnen Sie das Volumen des Silos. 2

Das Sonnenlicht, das zu einem bestimmten Zeitpunkt auf die beiden Gebäude trifft, kann durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix}-4\\3\\-3\end{pmatrix}$ beschrieben werden. Der Raumbereich zwischen Silo und Scheune, der vom Sonnenlicht nicht erreicht wird, wird von mehreren Flächen begrenzt. Eine dieser Begrenzungsflächen wird durch das ebene Fünfeck PQRST beschrieben, wobei der Punkt T im Modell den Schatten von $P(7{,}2|-3{,}4|9{,}6)$ darstellt.

e Das Fünfeck PQRST liegt in der Ebene F. Begründen Sie ohne die Koordinaten eines weiteren Eckpunkts des Fünfecks zu bestimmen, dass F durch die Gleichung $3x+4y=8$ beschrieben wird. 4

f Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{ST}$. 7

g Eine zweite Begrenzungsfläche des betrachteten Raumbereichs liegt im Modell in einer Ebene $H: 3x+4y=d$ mit $d \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Wert von d. 4

Erwartungshorizont

a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \circ \begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix} = 0$$

b

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\-12\\0\end{pmatrix}$$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ liefert das Gleichungssystem:

I $x = 2-4r$ II $y = 6-12s$ III $z = 3+3r$

Aus I ergibt sich $r = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ und damit aus III $z = 3 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3x + 4z = 18$.

c Mit $\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ gilt $\cos\varphi = \frac{\vec{m} \circ \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4}{5}$, d. h. $\varphi \approx 37°$.

d $(2\,m)^2 \cdot \pi \cdot 9{,}6\,m \approx 121\,m^3$

e Es gilt $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, d. h. die Ebene, die durch die angegebene Gleichung dargestellt wird, ist parallel zu den Geraden, die das Sonnenlicht beschreiben, sowie zur Symmetrieachse des Zylinders, der das Silo darstellt. Zudem erfüllen die Koordinaten von P die angegebene Gleichung.

f S hat die gleiche x-Koordinate und die gleiche z-Koordinate wie A. Da S in F liegt, gilt für seine y-Koordinate $3 \cdot 2 + 4y = 8$, d..

Gerade g durch P und T: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ -3{,}4 \\ 9{,}6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

Schnittpunkt von g und E:
$3 \cdot (7{,}2 - 4t) + 4 \cdot (9{,}6 - 3t) = 18 \Leftrightarrow 60 - 24t = 18 \Leftrightarrow t = 1{,}75$, d. h. $T(0{,}2 \,|\, 1{,}85 \,|\, 4{,}35)$

Damit: $\left| \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 1{,}85 \\ 4{,}35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \approx 2{,}6$

g Es handelt sich um die Begrenzungsfläche, die im Modell parallel zu F ist. Wegen $\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 5$ und $\begin{pmatrix} 7{,}2 \\ -3{,}4 \\ 9{,}6 \end{pmatrix} - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ -6{,}6 \\ 9{,}6 \end{pmatrix}$ liegt der Punkt $(4{,}8 \,|\, -6{,}6 \,|\, 9{,}6)$ in H.

Damit: $d = 3 \cdot 4{,}8 - 4 \cdot 6{,}6 = -12$

<u>Standardbezug</u>

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3	I				I		X		
b	3					II			X	
c	2			I		II			X	
d	2					I		X		
e	4	III		II	II					X
f	7		II			II	II		X	
g	4		III	III		III				X

2019 – CAS 1

Ein Logistikunternehmen testet auf einer Strecke zwischen Festland und einer Insel die Paketzustellung mithilfe eines Flugkörpers, einer sogenannten Drohne. In einem kartesischen Koordinatensystem wird das horizontale Gelände, über dem sich die Drohne bewegt, modellhaft durch die x_1x_2-Ebene dargestellt, die Lage des Startplatzes durch den Punkt $S(7320 \mid -1750 \mid 0)$ und die Lage des regulären Landeplatzes durch den Punkt $L(-990 \mid 6990 \mid 0)$. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

Die Drohne soll über dem Startplatz zunächst vertikal aufsteigen, bis sie eine Höhe von 50 m erreicht hat, und anschließend geradlinig in konstanter Höhe und mit konstanter Geschwindigkeit in die Richtung des Landeplatzes fliegen.

a Begründen Sie, dass die vorgesehene horizontale Flugbahn der Drohne im Modell entlang der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ verläuft. 2

100 Sekunden nachdem die Drohne die Höhe von 50 m erreicht hat, wird ihre Position durch den Punkt $P(6489 \mid -876 \mid 50)$ dargestellt.

b Zeigen Sie, dass sich die Drohne auf der vorgesehenen Flugbahn befindet. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der die Position der Drohne nach weiteren 200 Sekunden Flugzeit auf der vorgesehenen Flugbahn darstellt. 3

c Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Drohne während des horizontalen Flugs. 2

Die Drohne soll ihren Weg zum Landeplatz selbstständig zurücklegen können. Während der Testphase wird ihr Flug jedoch von einer Bodenstation aus überwacht und die Flugbahn bei Bedarf korrigiert. Die Position der Bodenstation wird durch den Punkt $B(0 \mid 0 \mid 0)$ dargestellt, ihre Reichweite beträgt 6000 m.

d Weisen Sie nach, dass sich die Drohne auf dem horizontalen Teil der vorgesehenen Flugbahn über eine Strecke von mehr als 8,5 km innerhalb der Reichweite der Bodenstation befindet. 5

Einer Korrektur der Bodenstation folgend weicht die Drohne im Modell im Punkt $Q(3996 \mid 1746 \mid 50)$ von der vorgesehenen Flugbahn ab und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von $5\,\frac{m}{s}$ geradlinig auf einen Ausweichlandeplatz zu, der durch den Punkt $A(4050 \mid 1810 \mid 0)$ dargestellt wird.

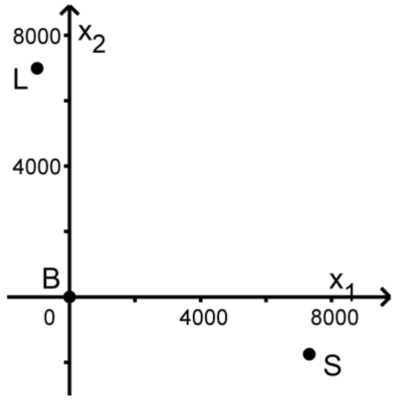
e Bestimmen Sie die Größe des Neigungswinkels der Flugbahn gegenüber dem Gelände beim Anflug auf den Ausweichlandeplatz. 3

f Berechnen Sie, um wie viele Meter sich die Flughöhe pro Sekunde verringert. 3

Nach der Landung auf dem Ausweichplatz steuert die Drohne eine Position an, die sich in einer Höhe von 50 m befindet und vom Startplatz, vom regulären Landeplatz und von der Bodenstation gleich weit entfernt ist. Diese Position wird durch den Punkt R beschrieben.

g Die Ebene E enthält alle Punkte, die von S und L den gleichen Abstand haben. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

h Stellen Sie die Ebene E in der Abbildung dar. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem unter Verwendung der Abbildung die Koordinaten von R ermittelt werden könnten. Veranschaulichen Sie das Verfahren in der Abbildung. 4



Erwartungshorizont

a Der Punkt $(7320\,|\,-1750\,|\,50)$ stellt die Position der Drohne 50 m vertikal über dem Startplatz dar.

$\overrightarrow{SL} = \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix}$

b $\begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6489 \\ -876 \\ 50 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 0{,}1$

$\begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + 0{,}3 \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4827 \\ 872 \\ 50 \end{pmatrix}$, d. h. der Punkt hat die Koordinaten $(4827\,|\,872\,|\,50)$.

c $\frac{1}{100} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6489 \\ -876 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} \right| \approx 12$, d. h. die Geschwindigkeit beträgt etwa $12\,\frac{m}{s}$.

d $\left| \begin{pmatrix} 7320 \\ -1750 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8310 \\ 8740 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \le 6000$ liefert, dass der Wert von r zwischen etwa 0,1601 und etwa 0,8867 liegen kann. Die zugehörige Strecke auf g hat eine Länge von etwa 8760, ist also länger als 8500.

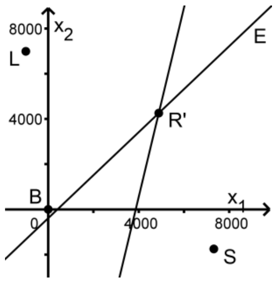
e Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert $\sin\varphi = \frac{\overrightarrow{QA} \circ \vec{n}}{\left|\overrightarrow{QA}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}$: $\varphi \approx -31°$

Die Größe des Neigungswinkels beträgt etwa 31°.

f $\frac{50}{\left|\overrightarrow{QA}\right|} \cdot 5\,\frac{m}{s} \approx 2{,}6\,\frac{m}{s}$, d. h. die Flughöhe verringert sich pro Sekunde um etwa 2,6 Meter.

g Die Gleichung von E hat die Form $-8310x_1 + 8740x_2 = c$.
Der Mittelpunkt $(3165\,|\,2620\,|\,0)$ von S und L liegt genau dann in E, wenn $c = -3402350$ gilt.

h



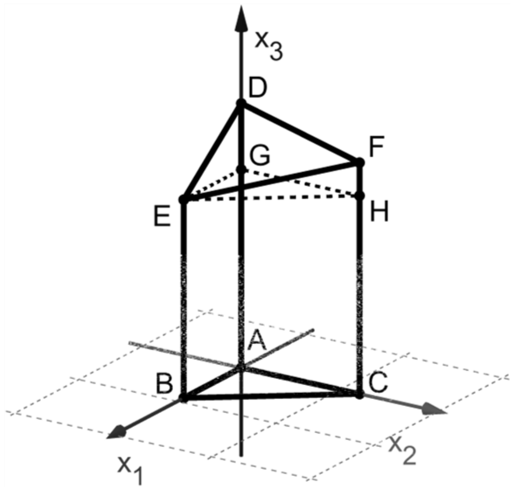
Der Punkt, der sich ergibt, wenn man R parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene verschiebt, wird mit R' bezeichnet. Da R den gleichen Abstand von S und B hat, liegt R' auf der Mittelsenkrechte von S und B. Der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechte und der Gerade, die E darstellt, liefert die x_1- und x_2-Koordinate von R, die x_3-Koordinate ist 50.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	2	X	X	X			I		I			I	X		
b	3	X	X	X	X			I	I		I		X		
c	2	X	X	X				II	II		I			X	
d	5	X	X	X				II	II		II			X	
e	3	X	X	X					I		II	I		X	
f	3	X	X	X				III	III		II				X
g	3	X		X			I	II			II			X	
h	4			X			III			II		III			X

2019 – CAS 2

Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF mit $B(4{,}5|0|0)$, $D(0|0|12)$, $E(4{,}5|0|9)$ und $F(0|6|10{,}5)$. Die Grundfläche liegt in der x_1x_2-Ebene, die Seitenflächen stehen dazu senkrecht. Die Punkte G und H liegen auf den Kanten $\overline{AD}$ bzw. $\overline{CF}$ und haben die gleiche x_3-Koordinate wie E.



a Begründen Sie, dass das Viereck DGHF ein Trapez ist, und bestimmen Sie das Volumen des Teilkörpers DGHFE. 4

Der Punkt $M(m_1|m_2|0)$ hat von allen Seiten des Dreiecks ABC den gleichen Abstand.

b Begründen Sie, dass $m_1 = m_2$ gilt. 2

c Die Gleichungen I und II liefern gemeinsam die Lösung einer Aufgabe: 5

$$\text{I}\quad \left|\begin{pmatrix}4{,}5\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4{,}5\\6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}m_1\\m_1\\0\end{pmatrix}\right|=m_1 \qquad \text{II}\quad \left(\begin{pmatrix}4{,}5\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4{,}5\\6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}m_1\\m_1\\0\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}-4{,}5\\6\\0\end{pmatrix}=0$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und erläutern Sie die beiden Gleichungen.

Betrachtet wird die Ebene $W: \vec{x}=\begin{pmatrix}4{,}5\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4{,}5\\6\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-6\\12\end{pmatrix}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$.

d Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden Schnittpunkte von W mit den Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{CF}$. Zeichnen Sie in die Abbildung die Figur ein, in der W den Körper ABCDEF schneidet. 4

e Die Ebene W schneidet die Strecke $\overline{GH}$. Bestimmen Sie rechnerisch das Verhältnis, in dem der Schnittpunkt diese Strecke teilt. 4

Betrachtet wird zudem die Schar der Geraden $g_u: \vec{x}=\begin{pmatrix}4{,}5\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4{,}5\\6-6u\\12u\end{pmatrix}$ mit $u\in\mathbb{R}$ und $t\in\mathbb{R}$.

f Ermitteln Sie diejenigen Werte von u, für die g_u die x_1x_2-Ebene jeweils unter einem Winkel der Größe 30° schneidet. 3

g Begründen Sie, dass die folgende Aussage falsch ist: 3

Jeder Punkt der Ebene W liegt auf einer Gerade der Schar.

Erwartungshorizont

a Die Seiten $\overline{DG}$ und $\overline{FH}$ des Vierecks stehen senkrecht zur x_1x_2-Ebene und sind damit parallel zueinander.

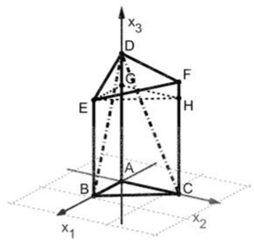
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(3+1{,}5)\cdot 6\cdot 4{,}5 = 20{,}25$

b Aufgrund der besonderen Lage des Dreiecks im Koordinatensystem, sind m_1 und m_2 die Abstände des Punkts M von $\overline{AB}$ bzw. $\overline{AC}$. Diese Abstände stimmen überein.

c Aufgabenstellung: „Bestimmen Sie den Wert von m_1."

Jeder Punkt der Gerade BC lässt sich in der Form $\begin{pmatrix}4{,}5\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-4{,}5\\6\\0\end{pmatrix}$ mit $r\in\mathbb{R}$ darstellen. Einer dieser Punkte hat von M den Abstand m_1. Außerdem steht der Verbindungsvektor von M und diesem Punkt senkrecht zum Richtungsvektor der Gerade BC.

d $x_1=0$ und $x_2=0$ liefern $(0\,|\,0\,|\,12)$,
$x_1=0$ und $x_2=6$ $(0\,|\,6\,|\,0)$.



e Der betrachtete Schnittpunkt liegt auf der Gerade durch C und D. $\overline{AC}$ ist parallel zu $\overline{GH}$. Bezeichnet man den Schnittpunkt mit S, so gilt folglich $\frac{|\overline{GS}|}{|\overline{SH}|}=\frac{|\overline{GD}|}{|\overline{GA}|}=\frac{1}{3}$.

f

$$\sin(30°)=\frac{\left|\begin{pmatrix}-4{,}5\\6-6u\\12u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-4{,}5\\6-6u\\12u\end{pmatrix}\right|\cdot 1}$$ liefert $u_1\approx -0{,}5$ und $u_2\approx 0{,}3$.

g Die Koordinaten des Punkts $(4{,}5\,|\,-6\,|\,12)$ erfüllen die Gleichung von W, aber nicht die Gleichung von g_u.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4	X	X	X			I			I	I		X		
b	2	X	X	X			I				I	I	X		
c	5	X	X	X			III			III		II			X
d	4	X		X				II		II	II			X	
e	4		X	X				II		II	I			X	
f	3	X	X	X				II			II	I		X	
g	3	X		X			III			III	II				X

2020 – WTR 1

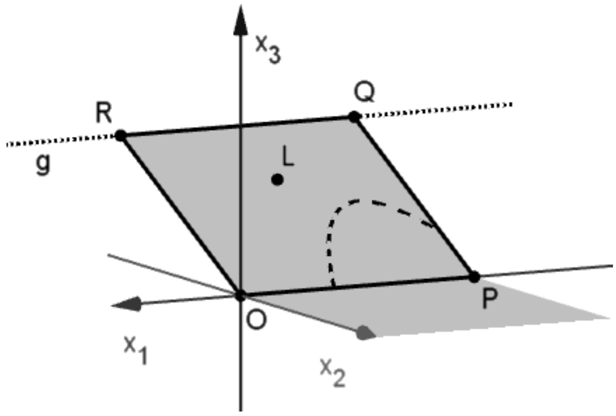
Gegeben sind der Punkt $L\left(-\frac{25}{4}\,|\,-8\,|\,6\right)$ und die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}$.

a Begründen Sie, dass g parallel zur x_1-Achse und dabei nicht durch L verläuft. 2

b L und g liegen in der Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $3x_2 + 4x_3 = 0$)

In der Abbildung ist neben L und g das Viereck OPQR dargestellt, dessen Eckpunkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $P\left(-\frac{25}{2}\,|\,0\,|\,0\right)$, $Q\left(-\frac{25}{2}\,|\,-12\,|\,9\right)$ und $R(0\,|\,-12\,|\,9)$ in E liegen. Q und R liegen außerdem auf g.



c Begründen Sie, dass OPQR ein Rechteck ist. 2

d Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten des Punkts S ermitteln könnte, für den das Viereck OPSR ein ebenes Drachenviereck ist. 3

Das Viereck OPQR stellt modellhaft den geneigten Teil einer Minigolfbahn dar, der Punkt L das Loch dieser Bahn. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund; eine Längeneinheit entspricht 10 cm in der Realität.

e Berechnen Sie den Flächeninhalt des geneigten Teils der Bahn. 2

f Berechnen Sie die Größe des Winkels, den der geneigte Teil der Bahn mit dem Untergrund einschließt. 3

Im Folgenden wird der in der Abbildung gestrichelt dargestellte Teil des Wegs eines Minigolfballs betrachtet. Der Ball soll im Folgenden als punktförmig angenommen werden. Seine Positionen auf dem dargestellten Teil des Wegs können durch Punkte $B_k\left(-5-3k\,|\,-8k+\frac{8}{3}k^2\,|\,6k-2k^2\right)$ mit geeigneten Werten von $k \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

g Weisen Sie nach, dass der Ball auf dem betrachteten Teil seines Wegs durchgehend Kontakt zur Minigolfbahn hat. 2

h Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem der Ball auf die seitliche Begrenzung der Minigolfbahn trifft. 4

i Ermitteln Sie die maximale Höhe über dem Untergrund, die der Ball erreicht. 3

Erwartungshorizont

a
Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ von g gibt auch die Richtung der x_1-Achse an.

Wegen $-12+a\cdot 0\neq -8$ für alle $a\in\mathbb{R}$ verläuft g nicht durch L.

b
$$\begin{pmatrix}0\\-12\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\frac{25}{4}\\-8\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{25}{4}\\-4\\3\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}\frac{25}{4}\\-4\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$ liefert $n_1=0$ und damit $-4n_2+3n_3=0$, d. h. $\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von E. Die Gleichung von E hat also die Form $3x_2+4x_3=b$.

$L\in E\Leftrightarrow b=3\cdot(-8)+4\cdot 6=0$

c Da O und P auf der x_1-Achse sowie Q und R auf g liegen, sind $\overline{OP}$ und $\overline{QR}$ parallel zueinander. Wegen $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}0\\-12\\9\end{pmatrix}$ stehen $\overline{OR}$ und $\overline{PQ}$ senkrecht zur x_1-Achse.

d Man bestimmt die Koordinaten des Schnittpunkts F der Gerade durch P und R mit der Ebene, die senkrecht zu dieser Gerade steht und den Punkt O enthält. Damit liefert $\overrightarrow{OS}=2\cdot\overrightarrow{OF}$ die Koordinaten von S.

e $\left|\overline{OP}\right|\cdot\left|\overline{OR}\right|=\frac{25}{2}\cdot\sqrt{12^2+9^2}=187{,}5$, d. h. der Flächeninhalt beträgt etwa $1{,}9\,m^2$.

f
$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}$$, d. h. $\alpha\approx 36{,}9°$

g Da $3\cdot\left(-8k+\frac{8}{3}k^2\right)+4\cdot\left(6k-2k^2\right)=0$ für alle $k\in\mathbb{R}$, liegen alle Punkte B_k in E.

h
Gerade durch P und Q: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-\frac{25}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix}0\\-12\\9\end{pmatrix}$, $d\in\mathbb{R}$

$\begin{pmatrix}-5-3k\\-8k+\frac{8}{3}k^2\\6k-2k^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{25}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix}0\\-12\\9\end{pmatrix}$ liefert $k=\frac{5}{2}$.

Damit: $\left(-\frac{25}{2}\,\middle|\,-\frac{10}{3}\,\middle|\,\frac{5}{2}\right)$

i Die Höhe des Balls über dem Untergrund kann mithilfe der Funktion h mit $h(k)=6k-2k^2$ beschrieben werden.

$h'(k)=6-4k=0\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$

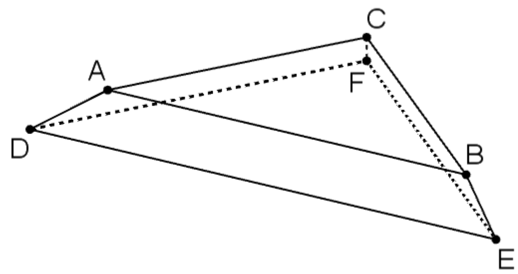
$h\left(\frac{3}{2}\right) = 4{,}5$, d. h. der Ball erreicht eine maximale Höhe von $45\,\text{cm}$ über dem Untergrund.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2	I				I	I	X		
b	4		I			II			X	
c	2	I				I	I	X		
d	3		II		I	I	II		X	
e	2			I		I		X		
f	3			I		II			X	
g	2			I		II			X	
h	4		III	II		II				X
i	3		III	III		II	II			X

2020 – WTR 2

In einem Koordinatensystem wird der abgebildete Körper ABCDEF mit $A(0|10|1)$, $B(10|20|1)$, $C(0|20|1)$, $D(0|7|0)$ und $F(0|20|0)$ betrachtet. Die beiden Seitenflächen ACFD und BEFC stehen senkrecht zur x_1x_2-Ebene.



1 a A, B und D liegen in der Ebene H. Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform. 4

(zur Kontrolle: $x_1 - x_2 + 3x_3 + 7 = 0$)

b Begründen Sie, dass die Gerade $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ sowohl in der x_1x_2-Ebene als auch in der Ebene H liegt. 2

Der Punkt E liegt auf i, wobei der Abstand von E zu F ebenso groß ist wie der Abstand von D zu F.

c Ermitteln Sie die Koordinaten von E. 5

d Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Vierecke ACFD und BEFC den gleichen Flächeninhalt haben. 3

2 Der Körper ABCDEF stellt modellhaft ein Podest dar, das auf der Bühne eines Theaters steht, das Viereck ADEB die Vorderseite des Podests und der Punkt D deren untere linke Ecke. Die x_1x_2-Ebene beschreibt den horizontalen Boden der Bühne. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a Zeigen Sie, dass die Deckfläche des Podests rechtwinklig ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt. 3

b Die Position eines Scheinwerfers kann im Modell durch den Punkt $(5|-3|z)$ dargestellt werden. Vom Scheinwerfer ausgehendes Licht trifft an der unteren linken Ecke der Vorderseite des Podests unter einem Winkel der Größe 47° auf den Boden auf. Ermitteln Sie die Höhe des Scheinwerfers über dem Boden der Bühne. 4

c Die Position eines zweiten Scheinwerfers lässt sich im Modell durch den Punkt $P(2|4|8)$ beschreiben. Die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ schneidet die Ebene mit der Gleichung $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ im Punkt $Q(-2|8|1)$. Es gilt $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 9$. 4

Treffen Sie auf der Grundlage dieser Informationen eine Aussage über den Abstand des zweiten Scheinwerfers von der Vorderkante der Deckfläche des Podests. Begründen Sie Ihre Aussage ohne zu rechnen.

Erwartungshorizont

1 a Das aus $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $m, n \in \mathbb{R}$ resultierende Gleichungssystem

$$\text{I} \quad x_1 = 10m \qquad \text{II} \quad x_2 = 10 + 10m - 3n \qquad \text{III} \quad x_3 = 1 - n$$

liefert $x_2 = 10 + x_1 + 3x_3 - 3 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 3x_3 + 7 = 0$.

b Für alle Punkte von i gilt $x_3 = 0$, d. h. i liegt in der x_1x_2-Ebene. Wegen $\lambda - (7 + \lambda) + 7 = 0$ liegt i auch in H.

c Für $\lambda \neq 0$ gilt:

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda \\ 7+\lambda \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \overline{DF} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + (\lambda - 13)^2} = 13 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda^2 - 26\lambda + 13^2 = 13^2$$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^2 - 26\lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda \cdot (\lambda - 13) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 13$$

Damit: $E(13 \mid 20 \mid 0)$

d Grund- und Deckfläche des Körpers sind parallel zur x_1x_2-Ebene, die beiden Vierecke stehen senkrecht dazu, sind also Trapeze mit gleicher Höhe. Da zudem die Punkte A, B, D und E in einer Ebene liegen, gilt wegen $\overline{DF} = \overline{EF}$ auch $\overline{AC} = \overline{BC}$.

2 a $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\frac{1}{2} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$, d. h. der Flächeninhalt beträgt $50\,m^2$.

b $\tan 47° = \dfrac{z}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \dfrac{z}{\sqrt{125}} \Leftrightarrow z = \tan 47° \cdot \sqrt{125}$, d. h. die Höhe beträgt etwa $12\,m$.

c Der Abstand ist größer als $9\,m$.

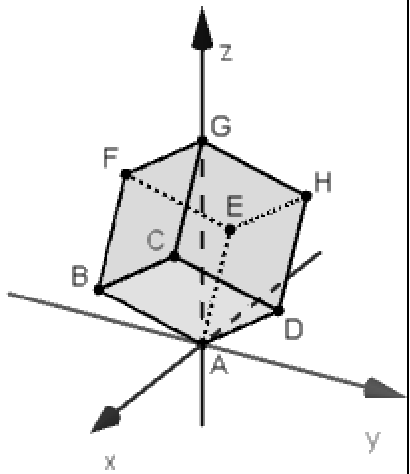
Begründung: Q ist der Fußpunkt des Lots von P auf die Gerade durch A und B. Da $Q \notin \overline{AB}$, ist der Abstand von P zu $\overline{AB}$ größer als $\left|\overline{PQ}\right|$.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	4					II			X	
b	2	I				I	I	X		
c	5		II			II	I		X	
d	3	III			II		III			X
2 a	3			I	I	I		X		
b	4		II	II		II			X	
c	4	II	III	II	I		III			X

<u>2020 – CAS 2</u>

Betrachtet wird der abgebildete Würfel mit $A(0|0|0)$, $B(3|-3|3)$, $G(0|0|9)$ und $H(-3|3|6)$.



a Berechnen Sie das Volumen des Würfels. 2

b Begründen Sie, dass das Viereck ABGH ein Rechteck ist, und zeichnen Sie dieses in die Abbildung ein. 3

c Das Viereck ABGH liegt in der Ebene L. Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $x + y = 0$)

d Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Ebene L mit der xz-Ebene einschließt. 2

e Ermitteln Sie die Koordinaten von F. 5

f Die Gerade durch B und G schneidet die xy-Ebene im Punkt S. Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem B die Strecke $\overline{SG}$ teilt. 2

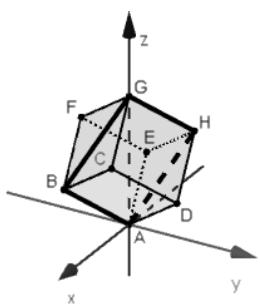
g Die Ebene, die durch die Mittelpunkte der Kanten $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{AD}$ und $\overline{DH}$ verläuft, teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass das Volumen des kleineren Teilkörpers ein Achtel des Volumens des Würfels ist. 5

h Gegeben ist die Schar der Ebenen $z = k$ mit $k \in \mathrm{IR}$. Geben Sie in Abhängigkeit von k die unterschiedlichen Arten der Figuren an, in denen die Ebenen für $0 < k < 9$ den Würfel schneiden. 3

<u>Erwartungshorizont</u>

a $\left|\overrightarrow{AB}\right|^3 = 81\sqrt{3}$

b $\overline{AB}$ und $\overline{GH}$ sind als Kanten, $\overline{AH}$ und $\overline{BG}$ als Seitendiagonalen eines Würfels gleich lang. $\overline{BG}$ liegt in der Seitenfläche BFGC und steht damit senkrecht zu $\overline{AB}$.



c $\overrightarrow{AB} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \wedge \overrightarrow{AG} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ liefert $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von L. Da A in L liegt, ergibt sich für die gesuchte Gleichung $x + y = 0$.

d Da L die z-Achse enthält und den Winkel halbiert, den die positive x-Achse und die negative y-Achse einschließen, beträgt die Größe des gesuchten Winkels 45°.

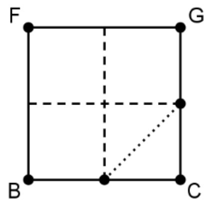
e Mittelpunkt von $\overline{BG}$: $M(1{,}5|-1{,}5|6)$

Da $\overline{CF}$ senkrecht zu L steht, gilt $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BG}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$.

Damit: $F\left(1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \mid -1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \mid 6\right)$

f $\frac{\left|\overline{SB}\right|}{\left|\overline{BG}\right|} = \frac{3}{9-3} = \frac{1}{2}$

g Der kleinere Teilkörper ist ein gerades Prisma. Die Grundfläche des Prismas ist eine Teilfläche der Seitenfläche BFGC; der Inhalt dieser Teilfläche ist ein Achtel des Inhalts der Seitenfläche BFGC. Die Höhe des Prismas stimmt mit der Kantenlänge des Würfels überein.



h Für $0 < k \leq 3$ und $6 \leq k < 9$ ist die jeweilige Schnittfigur ein Dreieck, für $3 < k < 6$ ein Sechseck.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2					I		X		
b	3	I			I	I		X		
c	3					II			X	
d	2					II			X	
e	5	III	III		II	III	II			X
f	2		II			I	I		X	
g	5	II			II		II		X	
h	3	III	III		II					X

2015 – WTR 1

1 In einer Großstadt steht die Wahl des Oberbürgermeisters bevor. Vor Beginn des Wahlkampfs wird eine repräsentative Umfrage unter den Wahlberechtigten durchgeführt. Der Umfrage zufolge haben sich 44 % der befragten Wahlberechtigten bereits für einen Kandidaten entschieden; jeder Siebte derjenigen Befragten, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, ist Jungwähler, d. h. eine wahlberechtigte Person im Alter bis 24 Jahre. Der Anteil dieser Jungwähler unter den Wahlberechtigten beträgt 12 %.

a Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm oder eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel. 4

b Zeigen Sie, dass der Anteil derjenigen, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, unter den befragten Jungwählern größer ist als unter denjenigen befragten Wahlberechtigten, die älter als 24 Jahre sind. Begründen Sie, dass es trotz dieser Tatsache nicht sinnvoll ist, sich im Wahlkampf vorwiegend auf die Jungwähler zu konzentrieren. 4

c Der Kandidat der Partei A spricht an einem Tag während seines Wahlkampfs 48 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau sechs Jungwähler befinden. 2

2 Der Umfrage zufolge hätte der Kandidat der Partei A etwa 50 % aller Stimmen erhalten, wenn die Wahl zum Zeitpunkt der Befragung stattgefunden hätte. Ein Erfolg im ersten Wahlgang, für den mehr als 50 % aller Stimmen erforderlich sind, ist demnach fraglich. Deshalb rät die von der Partei A eingesetzte Wahlkampfberaterin in der Endphase des Wahlkampfs zu einer zusätzlichen Kampagne, die allerdings mit Kosten verbunden wäre. Die Partei ist daran interessiert, einerseits einen Erfolg im ersten Wahlgang zu erreichen, andererseits unnötige Kosten zu vermeiden.

a Um einen Anhaltspunkt für eine Entscheidung über die Durchführung einer zusätzlichen Kampagne zu gewinnen, soll die Nullhypothese „Der Kandidat der Partei A würde gegenwärtig höchstens 50 % aller Stimmen erhalten.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Wahlberechtigten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 5

b Vor der Durchführung des beschriebenen Tests wurde festgelegt, auf die Kampagne nur dann zu verzichten, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste. Entscheiden Sie, ob bei dieser Festlegung das Interesse, einen Erfolg im ersten Wahlgang zu erreichen, oder das Interesse, unnötige Kosten zu vermeiden, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 3

3 Nach der Wahl darf die Partei A in einem Ausschuss drei Sitze besetzen. Von den acht Stadträtinnen und vier Stadträten der Partei A, die Interesse an einem Sitz in diesem Ausschuss äußern, werden drei Personen per Losentscheid als Ausschussmitglieder bestimmt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der weiblichen Ausschussmitglieder der Partei A.

a Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$. 3

b Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen X bzw. Y. 4

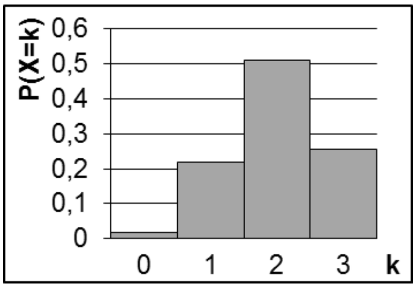


Abb. 1

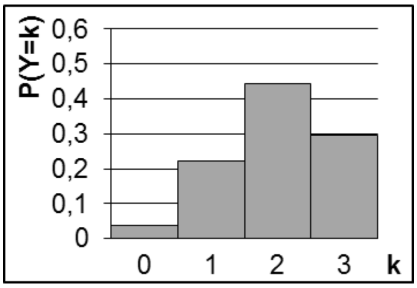


Abb. 2

Die Zufallsgröße X besitzt den Erwartungswert 2 und die Varianz $\frac{6}{11}$. Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 3$ und $p = \frac{2}{3}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass Y den gleichen Erwartungswert wie die Zufallsgröße X, aber eine größere Varianz als X besitzt. Beschreiben Sie, woran man an den Abbildungen 1 und 2 erkennen kann, dass $\text{Var}(Y) > \text{Var}(X)$ gilt.

<u>Erwartungshorizont</u>

1 a J: „Die befragte Person ist Jungwähler."
K: „Die befragte Person hat sich bereits für einen Kandidaten entschieden."

	J	$\overline{J}$	
K	4 %	40 %	44 %
$\overline{K}$	8 %	48 %	56 %
	12 %	88 %	100 %

b $P_J\left(\overline{K}\right) = \frac{0{,}08}{0{,}12} \approx 66{,}7\,\%$, $P_{\overline{J}}\left(\overline{K}\right) = \frac{0{,}48}{0{,}88} \approx 54{,}5\,\%$

Begründung: Unter den befragten Wahlberechtigten, die älter als 24 Jahre sind, ist die Anzahl derjenigen, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, wesentlich größer als unter den Jungwählern.

c $\binom{48}{6} \cdot 0{,}12^6 \cdot 0{,}88^{42} \approx 17{,}1\%$

2 a Z: Anzahl der Wahlberechtigten, die angeben, dass sie sich gegenwärtig für den Kandidaten der Partei A entscheiden würden

$P_{0{,}5}^{200}\left(Z \geq k\right) \leq 5\,\%$

Geben mindestens 113 der 200 Wahlberechtigten an, dass sie sich gegenwärtig für den Kandidaten der Partei A entscheiden würden, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

b Bei Durchführung des Tests auf der Grundlage der getroffenen Festlegung beträgt das Risiko, irrtümlich auf eine zusätzliche Kampagne zu verzichten, höchstens 5 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Kampagne irrtümlich durchzuführen, kann dagegen wesentlich größer sein. Damit stand bei der Festlegung das Interesse im Vordergrund, einen Erfolg im ersten Wahlgang zu erreichen.

3 a $3 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{28}{55}$

b $E(Y) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$, $Var(Y) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Beschreibung: Die Wahrscheinlichkeiten für die drei Werte, die nicht mit dem Erwartungswert übereinstimmen, sind für den Wert 1 bei beiden Zufallsgrößen etwa gleich groß und für die Werte 0 und 3 bei der Zufallsgröße Y deutlich größer als bei der Zufallsgröße X.

<u>Standardbezug</u>

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
1 a	4					X			I	II		II		X	
b	4					X	II	II			I			X	
c	2					X			I		I		X		
2 a	5				X	X			II		II	II		X	
b	3					X	III	III				III			X
3 a	3				X	X			I		I		X		
b	4		X		X	X	III			III	I				X

2015 – CAS 1

Die Firmen A und B stellen Lampen her und liefern diese anschließend an Händler aus. Der Anteil defekter Lampen unter ausgelieferten Lampen der Firma A beträgt im Mittel 9 %, unter ausgelieferten Lampen der Firma B im Mittel 7 %. Im Folgenden soll sowohl für die Lampen der Firma A als auch für die Lampen der Firma B angenommen werden, dass diese unabhängig voneinander Defekte aufweisen.

1 Betrachtet werden Lampen, die von der Firma A ausgeliefert wurden.

a Zehn Lampen werden zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Lampen, die nicht defekt sind, größer ist als die Anzahl der defekten Lampen. 3

b 500 Lampen werden zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der defekten Lampen vom Erwartungswert der Anzahl der defekten Lampen um höchstens 10 % abweicht. 3

c Die Beschreibung des Sachzusammenhangs enthält eine Annahme, die bei Betrachtung der Anzahl defekter Lampen in einer Stichprobe eine Anwendung der Binomialverteilung ermöglicht. Geben Sie einen Grund dafür an, dass dieses Modell der Realität möglicherweise nicht gerecht wird. 2

2 Einem Händler werden Lampen geliefert, die in Kartons verpackt sind; jeder Karton enthält 30 Lampen. Der Händler wählt aus jedem Karton zwei Lampen zufällig aus und prüft diese. Sind bei einem Karton die beiden ausgewählten Lampen nicht defekt, so nimmt er diesen Karton an, ansonsten nicht.

a Ein Karton enthält sechs defekte Lampen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt. 3

b Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton höchstens sein darf, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Händler diesen Karton annimmt, mindestens 50 % beträgt. 3

3 Ein Discounter bezieht 35 % der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A und 65 % von der Firma B. Der Einkaufspreis beträgt 0,98 Euro für eine Lampe der Firma A und 1,02 Euro für eine Lampe der Firma B. Im Zusammenhang mit dem Einkauf findet keine Prüfung der Lampen statt. Für Kunden des Discounters sind die Lampen der beiden Firmen nicht unterscheidbar; der Verkaufspreis beträgt unabhängig vom Hersteller 1,49 Euro. Jede von einem Kunden ausgewählte Lampe wird an der Kasse geprüft: Ist eine Lampe defekt, so wird sie entsorgt. Bestimmen Sie den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn des Discounters. 7

4 Lampen eines anderen Herstellers weisen zum Teil Fehler im Leuchtsystem oder Fehler im Schraubmechanismus auf. Für eine zufällig ausgewählte Lampe beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Fehler im Schraubmechanismus vorliegt, 2 %, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Fehler vorliegen, 0,1 % und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der beiden Fehler vorliegt, 6,9 %. Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel, ob die beiden Fehler stochastisch unabhängig sind. 4

Erwartungshorizont

1 a X: Anzahl der defekten Lampen

$P_{0,09}^{10}(X \le 4) \approx 99{,}9\,\%$

b Y: Anzahl der defekten Lampen

$E(Y) = 500 \cdot 0{,}09 = 45$; $10\,\% \cdot 45 = 4{,}5$

$P_{0,09}^{500}(41 \le Y \le 49) \approx 51{,}8\,\%$

c Fällt bei der Lieferung von Lampen ein Karton zu Boden, so ist davon auszugehen, dass die Lampen in diesem Karton nicht unabhängig voneinander Defekte aufweisen.

2 a $\frac{24}{30} \cdot \frac{23}{29} \approx 63{,}4\,\%$

b Ist d die Anzahl der defekten Lampen in einem Karton, so gilt:

$\frac{30-d}{30} \cdot \frac{29-d}{29} \ge 0{,}5 \Leftrightarrow d \le 8$

3 G: Gewinn des Discounters für eine zufällig ausgewählte Lampe in Euro

$P(G = -1{,}02) = 0{,}65 \cdot 0{,}07 = 0{,}0455$, $P(G = -0{,}98) = 0{,}35 \cdot 0{,}09 = 0{,}0315$,
$P(G = 0{,}47) = 0{,}65 \cdot 0{,}93 = 0{,}6045$, $P(G = 0{,}51) = 0{,}35 \cdot 0{,}91 = 0{,}3185$

$E(G) = 0{,}0455 \cdot (-1{,}02) + 0{,}0315 \cdot (-0{,}98) + 0{,}6045 \cdot 0{,}47 + 0{,}3185 \cdot 0{,}51 \approx 0{,}37$

Der im Mittel pro Lampe zu erwartende Gewinn beträgt etwa 37 Cent.

4 L: „Die Lampe weist einen Fehler im Leuchtsystem auf."
S: „Die Lampe weist einen Fehler im Schraubmechanismus auf."

	L	$\overline{L}$	
S	0,1 %	1,9 %	2,0 %
$\overline{S}$	4,9 %		
	5,0 %		

Damit: $P_L(S) = \frac{0{,}001}{0{,}05} = 0{,}02 = P(S)$, d. h. L und S sind stochastisch unabhängig.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
1 a	3				X	X			I		I		X		
b	3		X		X	X		I	I		I		X		
c	2					X	II		II			I		X	
2 a	3					X			II			I		X	
b	3					X		III			II	II			X
3	7		X		X	X		II	II			II		X	
4	4					X	III		II	II					X

2017 – WTR 2

Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualitätsstufe A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %, eines der Qualitätsstufe B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %.

Ein Gemüseanbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, davon 65 % der Qualitätsstufe A. Alle gekauften Samenkörner werden gesät.

a Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 3

b Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig ausgewählten keimenden Samenkorn um ein Samenkorn der Qualitätsstufe B handelt. 3

c Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit: 3

E: „Von 200 gesäten Samenkörnern der Qualitätsstufe B keimen genau 140."

F: „Von 200 gesäten Samenkörnern der Qualitätsstufe B keimen mehr als 130 und weniger als 150."

d Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang: 2

$$1-\left(\sum_{i=0}^{120}\binom{200}{i}\cdot 0{,}7^{i}\cdot 0{,}3^{200-i}+\sum_{i=160}^{200}\binom{200}{i}\cdot 0{,}7^{i}\cdot 0{,}3^{200-i}\right)$$

e Der Preis pro Samenkorn beträgt für die Qualitätsstufe A 17 Cent und für die Qualitätsstufe B 12 Cent. Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Gurkenpflanze heran. Dabei besteht das Risiko, dass die Pflanze aufgrund von Wettereinflüssen oder Schädlingen keine Früchte trägt. Dieses Risiko beträgt für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe A 15 % und für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe B 25 %. Die Anzahl der Gurken, die pro fruchttragender Pflanze im Mittel geerntet werden können, ist unabhängig von der Qualitätsstufe der Samenkörner. Der Anbaubetrieb verkauft alle geernteten Gurken zum gleichen Preis. Prüfen Sie, ob es für den Anbaubetrieb finanziell sinnvoll wäre, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe B zu beschränken. 6

f Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B durch eine Weiterentwicklung auf mehr als 70 % erhöht habe. Deshalb soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B ist höchstens 70 %." auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Dazu werden nach der Weiterentwicklung 100 Samenkörner der Qualitätsstufe B gesät. Bestimmen Sie die Entscheidungsregel des Tests. 5

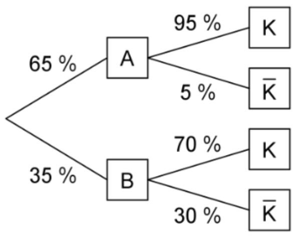
g Für eine Qualitätsstufe C wird vermutet, dass die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns 60 % beträgt. Es werden 50 Samenkörner gesät; davon keimen 27. 3

Eine Wahrscheinlichkeit von 60 % ist bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % mit der angegebenen Anzahl keimender Samenkörner verträglich, wenn 27 im Intervall $[\mu-1{,}96\sigma;\mu+1{,}96\sigma]$ liegt. Dabei ist μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung einer $B_{50;0,6}$-verteilten Zufallsgröße.

Untersuchen Sie, ob die vermutete Wahrscheinlichkeit von 60 % bei der angegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit damit verträglich ist, dass 27 Samenkörner keimen.

Erwartungshorizont

a



A: „Ein zufällig ausgewähltes Samenkorn gehört zur Qualitätsstufe A."
B: „Ein zufällig ausgewähltes Samenkorn gehört zur Qualitätsstufe B."
K: „Ein zufällig ausgewähltes Samenkorn keimt."

b $\frac{0{,}35 \cdot 0{,}7}{0{,}65 \cdot 0{,}95 + 0{,}35 \cdot 0{,}7} \approx 28{,}4\,\%$

c $P(E) \approx 6{,}1\,\%$, $P(F) \approx 0{,}9305 - 0{,}0728 \approx 85{,}8\,\%$

d Mit dem Term kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass von 200 gesäten Samenkörnern der Qualitätsstufe B mindestens 121 und höchstens 159 keimen.

e Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass aus einem Samenkorn eine fruchttragende Pflanze heranwächst, beträgt für die Qualitätsstufe A $0{,}95 \cdot 0{,}85$, für die Qualitätsstufe B $0{,}7 \cdot 0{,}75$. Damit entstehen pro Pflanze für die Qualitätsstufe A Kosten in Höhe von $\frac{17\,\text{ct}}{0{,}95 \cdot 0{,}85} \approx 21\,\text{ct}$, für die Qualitätsstufe B in Höhe von $\frac{12\,\text{ct}}{0{,}7 \cdot 0{,}75} \approx 23\,\text{ct}$. Für den Anbaubetrieb wäre es finanziell also nicht sinnvoll, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe B zu beschränken.

f Z: Anzahl der keimenden Samenkörner

$P_{0{,}7}^{100}(Z > k) \leq 5\,\%$

Keimen mehr als 77 Samenkörner, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

g $\mu = 50 \cdot 0{,}6$, $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}$, $\mu - 1{,}96\sigma \approx 23{,}2$, $\mu + 1{,}96\sigma \approx 36{,}8$
Damit ist die vermutete Wahrscheinlichkeit bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % mit der Anzahl der keimenden Samenkörner verträglich.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	3					X			I	I		I	X		
b	3					X		II	II		I			X	
c	3					X			I		I		X		
d	2	X				X	III	III	III						X
e	6					X	III	III				II			X
f	5	X			X	X			II		II	II		X	
g	3		X		X	X					II	II		X	

2017 – CAS 1

Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile von Haushalten unterschiedlicher Größe an der Gesamtzahl der Haushalte im Jahr 2013 in Deutschland.

1-Personen-Haushalte	40,5 %
2-Personen-Haushalte	34,5 %
3-Personen-Haushalte	12,5 %
4-Personen-Haushalte	9,2 %
Haushalte mit mindestens 5 Personen	3,3 %

1 Für eine Umfrage im Jahr 2013 sollten 100 Haushalte zufällig ausgewählt werden.

a Berechnen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit: 3

A: „Es wurden genau vierzig 1-Personen-Haushalte ausgewählt.“

B: „Mindestens die Hälfte der ausgewählten Haushalte waren Mehrpersonenhaushalte.“

b Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang: 2

$$1-\left(0{,}967^{100}+100\cdot 0{,}033\cdot 0{,}967^{99}\right)$$

2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem im Jahr 2013 zufällig ausgewählten Mehrpersonenhaushalt um einen 3-Personen-Haushalt handelte. 3

3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in drei im Jahr 2013 zufällig ausgewählten Haushalten insgesamt genau fünf Personen lebten. 3

4 Ermitteln Sie, wie viele Haushalte man im Jahr 2013 mindestens hätte zufällig auswählen müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als zwanzig 2-Personen-Haushalte sind. 4

5 Im Jahr 2013 lebten in Deutschland insgesamt etwa 80 Millionen Menschen. Bestimmen Sie für das Jahr 2013 einen Näherungswert für die Gesamtzahl der Haushalte in Deutschland und erläutern Sie Ihr Vorgehen. 4

6 Im Jahr 2014 wurde vermutet, dass der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte größer als im Jahr 2013 ist. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob diese Vermutung zutrifft, sollte auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Haushalten und einem Signifikanzniveau von 5% ein Test durchgeführt werden. Dabei sollte möglichst vermieden werden, irrtümlich davon auszugehen, dass die Vermutung zutrifft. Geben Sie die passende Nullhypothese an und bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 6

Erwartungshorizont

1 a $P(A)\approx 8{,}1\%$, $P(B)\approx 97{,}8\%$

b Mit dem Term kann die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass in mindestens zwei der ausgewählten Haushalte mindestens fünf Personen lebten.

2 $\frac{0{,}125}{1-0{,}405}\approx 21{,}0\%$

3 $3\cdot 0{,}405^2\cdot 0{,}125+3\cdot 0{,}405\cdot 0{,}345^2\approx 20{,}6\%$

4 Y: Anzahl der 2-Personen-Haushalte
Ist n die Anzahl der auszuwählenden Haushalte, so gilt:

$$P_{0,345}^{n}\left(Y > 20\right) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow n \geq 80$$

5 Geht man vereinfachend davon aus, dass in den Haushalten mit mindestens 5 Personen genau fünf Personen lebten, und bezeichnet die Anzahl der Haushalte mit x, so ergibt sich aus

$$\left(1 \cdot 0{,}405 + 2 \cdot 0{,}345 + 3 \cdot 0{,}125 + 4 \cdot 0{,}092 + 5 \cdot 0{,}033\right) \cdot x = 80000000$$

eine Gesamtzahl von etwa 40 Millionen Haushalten.

6 Nullhypothese: „Der tatsächliche Anteil der 1-Personen-Haushalte beträgt höchstens 40,5 %."

Z: Anzahl der 1-Personen-Haushalte

$$P_{40,5}^{500}\left(Z \geq k\right) \leq 5\,\%$$

Befinden sich in der Stichprobe mindestens 222 1-Personen-Haushalte, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

Standardbezug

	BE	**Leitideen**					**allgemeine mathematische Kompetenzen**						**Anforderungsbereich**		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
1 a	3					X			I	I	I		X		
b	2					X	II	II	II					X	
2	3					X			I	I	I		X		
3	3					X			II	I	I			X	
4	4	X			X	X		III	II		II				X
5	4	X	X			X		III	III			II			X
6	6	X			X	X	II		II			II		X	

2017 – CAS 2

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv.

1 Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %.

Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

a Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm. 3

b Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit: 3

A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv.“

B: „Das Testergebnis ist negativ.“

c Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist. 3

2 Im Rahmen einer Studie werden aus der Bevölkerung Deutschlands 20000 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt. Berechnen Sie in einem geeigneten Modell die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als 10 % vom Erwartungswert von X abweicht. 4

3 Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem ein Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen kleiner als 15 mg, so ist dieser unbrauchbar. Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

a Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können. 4

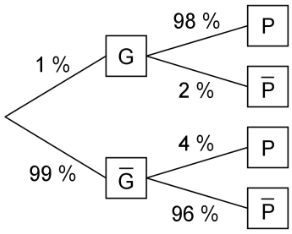
b Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll sich durch diese Änderung jedoch nicht erhöhen. Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss. 4

c Die Indikatormenge auf den Teststreifen ist normalverteilt. Vor einer Verbesserung des Herstellungsverfahrens hatte der Erwartungswert 20 mg und die Standardabweichung 4,0 mg betragen. 4

Durch die Verbesserung konnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teststreifen aufgrund der Indikatormenge unbrauchbar ist, halbiert werden. Der Erwartungswert für die Indikatormenge blieb dabei unverändert. Bestimmen Sie die geänderte Standardabweichung.

Erwartungshorizont

1 a



G: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor.“
P: „Das Testergebnis ist positiv.“

b $P(A) = 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}98\,\%$
$P(B) = 0{,}01 \cdot 0{,}02 + 0{,}99 \cdot 0{,}96 \approx 95{,}06\,\%$

c $\frac{0{,}01 \cdot 0{,}98}{0{,}01 \cdot 0{,}98 + 0{,}99 \cdot 0{,}04} \approx 19{,}8\,\%$

2 $E(X) = 0{,}01 \cdot 20000 = 200$; $10\,\% \cdot 200 = 20$

$1 - P_{0{,}01}^{20000}(180 \le X \le 220) \approx 14{,}5\,\%$

3 a Folgende Fehlentscheidungen können auftreten:

- Obwohl höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.
- Obwohl mehr als 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle nicht dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

b Y: Anzahl unbrauchbarer Teststreifen
Ist k die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, so gilt:

$P_{0{,}1}^{200}(Y \ge k) \le P_{0{,}1}^{100}(Y \ge 16) \Leftrightarrow k \ge 29$

c Z: Indikatormenge in mg
Für eine Standardabweichung von 4,0 mg gilt $P(Z < 15) \approx 10{,}6\,\%$.
$P(Z < 15) \approx 5{,}3\,\%$ liefert eine Standardabweichung von etwa 3,1 mg.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3					X			I	I		I	X		
b	3					X			I		I		X		
c	3					X		II	II		I			X	

2	4		X		X	X		II	II		II			X	
3 a	4					X	II					II		X	
b	4	X			X	X		III	II			II			X
c	4	X	X		X	X		III	II		II				X

2018 – WTR 1

1 Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

a 50 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt. Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit: 3

A: „Genau zwei der Teile sind fehlerhaft.“

B: „Mindestens 6 % der Teile sind fehlerhaft.“

b Ermitteln Sie, wie viele Kunststoffteile mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit davon mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens drei Teile keinen Fehler haben. 4

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4 %.“ auf der Grundlage einer Stichprobe von 200 Teilen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

c Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 5

d Das neue Granulat ist teurer als das vorherige. Geben Sie an, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe. 3

2 Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größen der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

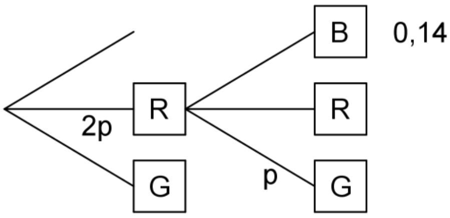
Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$.

a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls $\frac{1}{6}$ beträgt. 2

b Bei dem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen. Berechnen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen. 3

c Die Größen der Sektoren werden geändert. Dabei wird der grüne Sektor verkleinert. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die beiden ersten Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben. 5



Bestimmen Sie die Größe des zum blauen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels.

Erwartungshorizont

1 a X: Anzahl der fehlerhaften Kunststoffteile

$P_{0,04}^{50}(X=2) \approx 27,6\%$

$6\% \cdot 50 = 3$, $P_{0,04}^{50}(X \geq 3) = 1 - P_{0,04}^{50}(X \leq 2) \approx 32,3\%$

b Y: Anzahl der Kunststoffteile, die keinen Fehler haben

$P_{0,96}^{3}(Y \geq 3) \approx 88,5\%$

$P_{0,96}^{4}(Y \geq 3) = 1 - P_{0,96}^{4}(Y \leq 2) \approx 99,1\%$

Es müssen mindestens vier Teile ausgewählt werden.

c $P_{0,04}^{200}(X \leq k) \leq 5\% \Leftrightarrow k \leq 3$

Sind höchstens drei der 200 Teile fehlerhaft, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

d Es soll möglichst vermieden werden, das teurere neue Granulat dauerhaft einzusetzen, obwohl sich der Anteil der fehlerhaften Teile nicht reduziert hat. Das Risiko, aufgrund des Testergebnisses irrtümlich davon auszugehen, dass sich dieser Anteil reduziert hat, beträgt höchstens 5%.

2 a $3! \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

b Bezeichnet man den gesuchten Betrag mit a, so gilt:

$\frac{1}{6} \cdot 5€ + \frac{1}{6} \cdot (a - 5€) - \frac{4}{6} \cdot 5€ = 0 \Leftrightarrow a = 20€$

c Für $p < \frac{1}{6}$ gilt: $2p \cdot (1 - p - 2p) = 0,14 \Leftrightarrow 6p^2 - 2p + 0,14 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{10}$

Damit: $(1 - p - 2p) \cdot 360° = 252°$

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3				X	X			I		I		X		
b	4				X	X	I	III	II						X
c	5				X	X	II		II			II		X	
d	3					X	III	III				II			X
2 a	2	X				X			I		I		X		
b	3	X	X		X	X		II	II		II			X	
c	5				X	X		II		II	II			X	

2018 – WTR 2

Eine Firma stellt Flachbildschirme her. Im Mittel ist einer von fünf hergestellten Bildschirmen fehlerhaft.

a Es soll angenommen werden, dass die Anzahl fehlerhafter Geräte unter zufällig ausgewählten Bildschirmen durch eine binomialverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 5

A: „Von 50 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind höchstens 8 fehlerhaft."

B: „Von 200 zufällig ausgewählten Bildschirmen sind mehr als 15 % und weniger als 25 % fehlerhaft."

Fehler der Bildschirme treten am häufigsten in Form eines defekten Displays sowie in Form eines defekten Netzteils auf. Für einen zufällig ausgewählten Bildschirm beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- das Display defekt ist, 10,7 %,
- weder das Display noch das Netzteil defekt ist, 87,3 %,
- entweder das Display oder das Netzteil defekt ist, 11,7 %.

b Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. 4

c Untersuchen Sie, ob die beiden betrachteten Defekte unabhängig voneinander auftreten. 3

Jeder Bildschirm wird vor der Auslieferung abschließend geprüft.

d Von vierzig abschließend geprüften Bildschirmen, unter denen sechs fehlerhaft sind, werden zehn zufällig ausgewählt. Beurteilen Sie, ob die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten binomialverteilt ist. 2

e Bei der abschließenden Prüfung werden alle fehlerfreien Bildschirme als fehlerfrei eingestuft. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein fehlerhafter Bildschirm als fehlerhaft eingestuft wird, wird mit x bezeichnet. Ein im Rahmen der Prüfung als fehlerfrei eingestufter Bildschirm wird zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Wert von x, für den die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Bildschirm fehlerhaft ist, höchstens 5 % beträgt. 5

[restliche Aufgabe zum „Schätzen von Parametern"]

Erwartungshorizont

a X: Anzahl der fehlerhaften Bildschirme

$P_{0,2}^{50}\left(X \le 8\right) \approx 30,7\,\%$

$P_{0,2}^{200}\left(30 < X < 50\right) \approx 90,8\,\%$

b D: „Das Display ist defekt."
N: „Das Netzteil ist defekt."

	D	$\overline{D}$	
N	1,0 %	2,0 %	3,0 %
$\overline{N}$	9,7 %	87,3 %	97,0 %
	10,7 %	89,3 %	100 %

c $P(D)\cdot P(N)=0{,}107\cdot 0{,}03=0{,}00321\neq 0{,}01=P(D\cap N)$
Die beiden Defekte treten also nicht unabhängig voneinander auf.

d Die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten ist nicht binomialverteilt. Begründung: Wäre die Anzahl fehlerhafter Bildschirme unter den ausgewählten binomialverteilt, so wäre es beispielsweise möglich, dass sieben Bildschirme fehlerhaft sind. Dies steht jedoch im Widerspruch zum Sachzusammenhang.

e $\frac{0{,}2\cdot(1-x)}{0{,}8+0{,}2\cdot(1-x)}\leq 0{,}05 \Leftrightarrow x\geq \frac{15}{19}$
Der kleinstmögliche Wert von x ist $\frac{15}{19}$.

<u>Standardbezug</u>

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
a	5				X	X			I		I		X		
b	4					X		II		II		II		X	
c	3					X	I		II		I			X	
d	2				X	X	II		II			II		X	
e	5					X		III			III	II			X

2018 – CAS 2

1 Wird den Tageseinnahmen eines Cafés ein Geldschein zufällig entnommen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser nicht mehr umlauffähig ist, 2 %.

a Unter den Tageseinnahmen des Cafés befinden sich insgesamt 200 Geldscheine. Bestimmen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass darunter 3

- ausschließlich umlauffähige Geldscheine sind.
- höchstens zwei Geldscheine sind, die nicht mehr umlauffähig sind.

b Bestimmen Sie die Anzahl der Geldscheine, die mindestens zu den Tageseinnahmen des Cafés gehören müssen, damit darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens vier nicht mehr umlauffähige Scheine sind. 4

2 In einem Behälter befinden sich insgesamt 380 Geldscheine. Deren Verteilung kann der folgenden Tabelle entnommen werden:

Wert des Scheins	5 €	10 €	20 €	50 €
Anzahl	44	60	72	204

Sechs dieser Geldscheine sind nicht mehr umlauffähig, darunter zwei mit einem Wert von jeweils 50 €.

a Aus dem Behälter wird ein Geldschein zufällig entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Schein einen Wert unter 50 € hat und umlauffähig ist. 3

b Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{374}{5}}{\binom{380}{7}}$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an. 2

3 In der ersten Hälfte des Jahres 2015 hat die Europäische Zentralbank (EZB) von etwa 17 Milliarden im Umlauf befindlichen Geldscheinen insgesamt 454 000 gefälschte Scheine aussortiert. Deren Verteilung ist im abgebildeten Diagramm dargestellt.

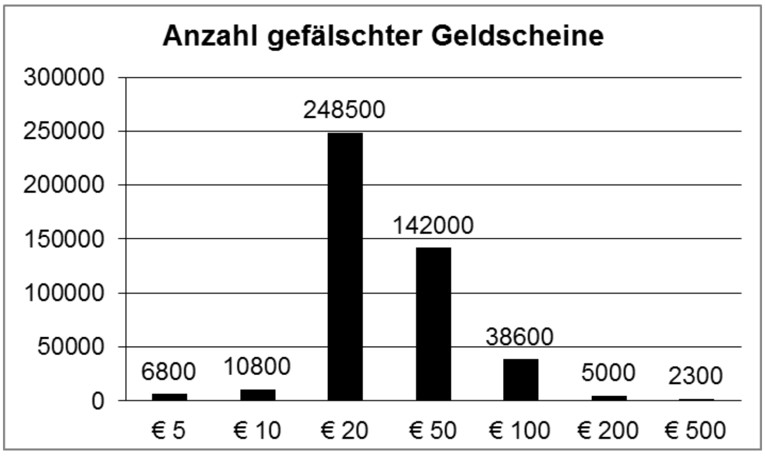


Abb. 1

a Einer dieser aussortierten gefälschten Geldscheine wird zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt den Wert des ausgewählten Scheins in Euro. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. 3

b Beurteilen Sie die folgende Aussage: 2

Aus Abbildung 1 lässt sich schließen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein unter allen im Umlauf befindlichen Geldscheinen zufällig ausgewählter 20 €-Schein gefälscht ist, fast doppelt so hoch war wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies bei einem zufällig ausgewählten 50 €-Schein der Fall ist.

4 Eine Kassiererin einer Bank behauptet, nur durch Tasten und Betrachten erkennen zu können, ob ein Geldschein echt oder gefälscht ist. Ein Kollege bezweifelt dies und legt ihr testweise zehn Geldscheine vor. Die Kassiererin muss für jeden der Scheine entscheiden, ob er echt oder gefälscht ist. Wird die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Kassiererin korrekt entscheidet, beträgt höchstens 50 %." auf einem Signifikanzniveau von 5 % abgelehnt, so ist der Kollege bereit, seine Zweifel aufzugeben.

a Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 5

b Der Kassiererin werden im Rahmen eines weiteren Tests mit unveränderter Nullhypothese und unverändertem Signifikanzniveau n Scheine vorgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie bei einem Geldschein die richtige Entscheidung trifft, wird mit p bezeichnet. Die Abbildung stellt für einen bestimmten Wert von n in Abhängigkeit von p die Wahrscheinlichkeit dafür dar, dass das Ergebnis des Tests im Ablehnungsbereich liegt. 3

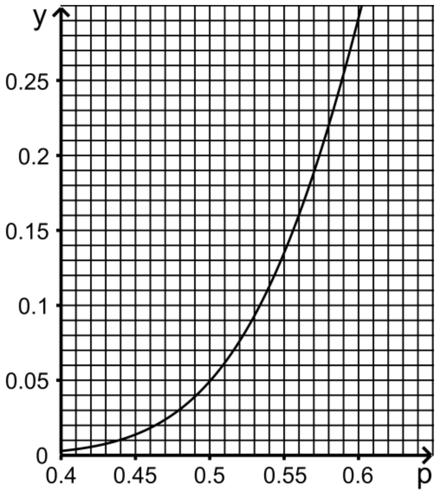


Abb. 2

Bestimmen Sie für ein geeignet gewähltes Beispiel mithilfe der Abbildung die Wahrscheinlichkeit für den zugehörigen Fehler zweiter Art.

Erwartungshorizont

1 a Y: Anzahl nicht mehr umlauffähiger Geldscheine

$P_{0,02}^{200}(Y=0)\approx 1{,}8\%$

$P_{0,02}^{200}(Y\le 2)\approx 23{,}5\%$

b $P_{0,02}^{332}(Y\ge 4)\approx 89{,}98\%$, $P_{0,02}^{333}(Y\ge 4)\approx 90{,}10\%$

In der Kasse müssen sich mindestens 333 Geldscheine befinden.

2 a $\frac{176-4}{380}\approx 45{,}3\%$

b Zufallsexperiment: Aus dem Behälter werden sieben Geldscheine zufällig entnommen.

Ereignis: Von den entnommenen Scheinen sind zwei nicht mehr umlauffähig.

3 a $\frac{1}{454000} \cdot (6800 \cdot 5\,€ + 10800 \cdot 10\,€ + 248500 \cdot 20\,€ + 142000 \cdot 50\,€$
$+ 38600 \cdot 100\,€ + 5000 \cdot 200\,€ + 2300 \cdot 500\,€) \approx 40\,€$

b Die Aussage ist falsch.
Begründung: Der beschriebene Zusammenhang zwischen gefälschten 20 €-Scheinen und gefälschten 50 €-Scheinen lässt sich aus der Abbildung nicht schließen, da nicht angegeben ist, wie viele Scheine dieser Werte insgesamt im Jahr 2015 jeweils im Umlauf waren.

4 a Z: Anzahl der korrekten Entscheidungen

$P_{0,5}^{10}(Z \geq k) \leq 0{,}05$

Trifft die Kassiererin für mindestens neun Scheine die korrekte Entscheidung, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

b Beispiel: $p = 58\%$
Der zugehörige Fehler zweiter Art beträgt etwa $1 - 22\% = 78\%$.

(Hinweis: Der Prüfling muss p größer als 50 % wählen.)

<u>Standardbezug</u>

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3				X	X			I		I		X		
b	4				X	X		III	II		II				X
2 a	3					X		II	I		I			X	
b	2					X			II	II		II		X	
3 a	3		X		X	X				I	I		X		
b	2					X	II		II			II		X	
4 a	5	X			X	X	II		II			II		X	
b	3					X		III		II		III			X

2019 – WTR 1

1 Für ein Schwimmbad besitzen 2000 Personen eine Jahreskarte. Für einen bestimmten Tag beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass X binomialverteilt ist. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an diesem Tag das Schwimmbad besucht, 10 %.

a Es gilt $P(X=210)\approx 2{,}2\%$. Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang. 2

b Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen. 2

c Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X höchstens um eine halbe Standardabweichung vom Erwartungswert der Zufallsgröße abweicht. 5

d Bestimmen Sie die größte natürliche Zahl k, für die die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als k Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, kleiner als 10 % ist. 3

e Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, das durch das abgebildete Baumdiagramm dargestellt wird. Geben Sie ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit $1-(r+s)$ beträgt. 2

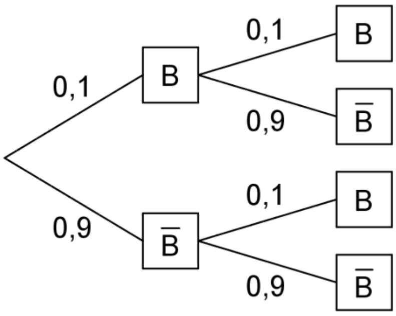


Abb. 1

2 An einem bestimmten Tag ist das Schwimmbad zwischen 07:00 Uhr und 21:00 Uhr geöffnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Zeitpunkt, zu dem ein zufällig ausgewählter Badegast das Schwimmbad betritt, mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert 14,5 und der Standardabweichung 2 beschrieben werden kann. Die zugehörige Dichtefunktion ist in der Abbildung 2 dargestellt; dabei ist t die seit 00:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden.

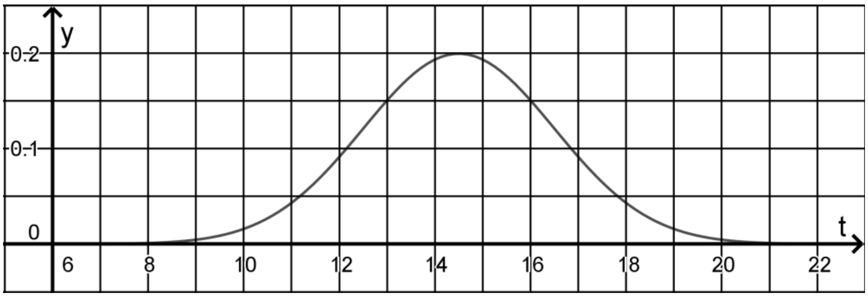


Abb. 2

a Geben Sie den Zeitraum mit einer Länge von einer Stunde an, für den mit der größten Anzahl eintreffender Badegäste zu rechnen ist. 1

b Ermitteln Sie grafisch, ob die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Badegast das Schwimmbad zwischen 12:00 Uhr und 16:00 Uhr betritt, größer als 50 % ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen. 4

c Am betrachteten Tag wird das Schwimmbad von 2500 Badegästen besucht. Ermitteln Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt mit dem Eintreffen des eintausendfünfhundertsten Badegasts zu rechnen ist. 3

d Beurteilen Sie mithilfe einer Rechnung die folgende Argumentation: 3

Das Schwimmbad ist nur zwischen 07:00 Uhr und 21:00 Uhr geöffnet. Deshalb ist es nicht sinnvoll, das Eintreffen der Badegäste mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße zu beschreiben, die für alle reellen Zahlen definiert ist.

<u>Erwartungshorizont</u>

1 a Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen, beträgt etwa 2,2 %.

b $P(X > 210) \approx 21{,}6\,\%$

c $2000 \cdot 0{,}1 = 200$, $\frac{1}{2}\sqrt{2000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 6{,}7$

$P(194 \le X \le 206) \approx 37{,}2\,\%$

d $P(X < 183) \approx 0{,}09$, $P(X < 184) \approx 0{,}11$

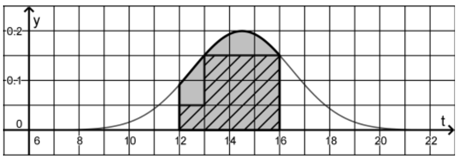
Damit: $k = 183$

e Zufallsexperiment: Zwei Jahreskartenbesitzer werden zufällig ausgewählt.

Ereignis: „Am betrachteten Tag wird das Schwimmbad entweder von beiden ausgewählten Personen besucht oder von keiner der beiden."

2 a Zeitraum: 14:00 Uhr bis 15:00 Uhr

b



Der Inhalt der grau markierten Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Badegast das das Schwimmbad zwischen 12:00 Uhr und 16:00 Uhr betritt. Dieser Inhalt ist größer als der Inhalt der schraffierten Fläche, der $10 \cdot 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}5$ beträgt.

c $P(7 \le Y \le k) = \frac{1500}{2500}$ liefert $k \approx 15$, d. h. mit dem Eintreffen des eintausendfünfhundertsten Badegasts ist etwa um 15:00 Uhr zu rechnen.

d Die Argumentation wird dem Sachzusammenhang nicht gerecht.

Begründung: Bezeichnet man die Zufallsgröße mit Y, so gilt $1 - P(7 \le Y \le 21) \approx 0{,}1\,\%$. Dem Betreten des Bads außerhalb der Öffnungszeiten wird durch die Zufallsgröße also eine vernachlässigbar kleine Wahrscheinlichkeit zugeordnet.

<u>Standardbezug</u>

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2				X	X			I	I		I	X		
b	2				X	X			I		I		X		
c	5		X		X	X		II	I		II			X	

d	3	X			X	X		III	II		II				X
e	2					X	III		III	II					X
2 a	1		X		X	X			I	I		I	X		
b	4		X	X	X	X		II		II		II		X	
c	3	X	X		X	X		II	II		II				X
d	3	X			X	X	II			I	II			X	

2019 – WTR 2

Ein Unternehmen organisiert Fahrten mit einem Ausflugsschiff.

1 Betrachtet wird zunächst eine Fahrt, bei der das Schiff mit 60 Fahrgästen voll besetzt ist. Zu Beginn der Fahrt werden drei Fahrgäste zufällig ausgewählt; diese erhalten jeweils ein Freigetränk.

a Ermitteln Sie die Anzahl möglicher Dreiergruppen, die sich bei der Auswahl ergeben können. 2

b Zwei Drittel der Fahrgäste kommen aus Deutschland, die übrigen aus anderen Ländern. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die drei ausgewählten Fahrgäste aus Deutschland kommen. 2

c Unter den Fahrgästen befinden sich Erwachsene und Kinder. Die Hälfte der Fahrgäste isst während der Fahrt ein Eis, von den Erwachsenen nur jeder Dritte, von den Kindern 75 %. Berechnen Sie, wie viele Kinder an der Fahrt teilnehmen. 3

2 Möchte man an einer Fahrt teilnehmen, so muss man dafür im Voraus eine Reservierung vornehmen. Erfahrungsgemäß erscheinen von den Personen mit Reservierung einige nicht zur Fahrt. Für die 60 Plätze lässt das Unternehmen deshalb bis zu 64 Reservierungen zu. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Fahrt tatsächlich 64 Reservierungen vorgenommen werden. Erscheinen mehr als 60 Personen mit Reservierung zur Fahrt, so können nur 60 von ihnen daran teilnehmen; die übrigen müssen abgewiesen werden.

Vereinfachend soll angenommen werden, dass die Anzahl der Personen mit Reservierung, die zur Fahrt erscheinen, binomialverteilt ist, wobei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, 10 % beträgt.

a Geben Sie einen Grund dafür an, dass es sich bei dieser Annahme im Sachzusammenhang um eine Vereinfachung handelt. 1

b Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine Person mit Reservierung abgewiesen werden muss. 3

c Für das Unternehmen wäre es hilfreich, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens eine Person mit Reservierung abweisen zu müssen, kleiner als ein Prozent wäre. Dazu müsste die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau. 4

Das Unternehmen richtet ein Online-Portal zur Reservierung ein und vermutet, dass dadurch der Anteil der Personen mit Reservierung, die zur jeweiligen Fahrt nicht erscheinen, zunehmen könnte. Als Grundlage für die Entscheidung darüber, ob pro Fahrt künftig mehr als 64 Reservierungen zugelassen werden, soll die Nullhypothese „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, beträgt höchstens 10 %." mithilfe einer Stichprobe von 200 Personen mit Reservierung auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Anzahl der möglichen Reservierungen pro Fahrt nur dann zu erhöhen, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste.

d Ermitteln Sie für den beschriebenen Test die zugehörige Entscheidungsregel. 5

e	Entscheiden Sie, ob bei der Wahl der Nullhypothese eher das Interesse, dass weniger Plätze frei bleiben sollen, oder das Interesse, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.	3
f	Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.	2

Erwartungshorizont

1 a $\binom{60}{3} = 34220$

b $\frac{40}{60} \cdot \frac{39}{59} \cdot \frac{38}{58} \approx 28{,}9\,\%$

c Bezeichnet man die Anzahl der an der Fahrt teilnehmenden Kinder mit k, so ist die Anzahl der Kinder, die ein Eis essen, $\frac{3}{4}k$, die Anzahl der Erwachsenen, die ein Eis essen, $\frac{1}{3} \cdot (60-k)$.

Damit: $\frac{3}{4}k + \frac{1}{3} \cdot (60-k) = 30 \Leftrightarrow \frac{5}{12}k = 10 \Leftrightarrow k = 24$

2 a Das Erscheinen bzw. Nichterscheinen erfolgt in der Regel für einige Personen mit Reservierung (z. B. befreundete Personen) nicht unabhängig voneinander.

b X: Anzahl der nicht erscheinenden Personen mit Reservierung
$P_{0,1}^{64}(X \le 3) \approx 10{,}6\,\%$

c $P_{0,14}^{64}(X \le 3) \approx 1{,}6\,\%$, $P_{0,15}^{64}(X \le 3) \approx 0{,}9\,\%$
Die Wahrscheinlichkeit müsste mindestens 15 % betragen.

d Der Fehler erster Art darf selbst bei der größten Wahrscheinlichkeit, die im Rahmen der Nullhypothese liegt, höchstens 5 % betragen.

$P_{0,1}^{200}(X \ge 27) \approx 6{,}7\,\%$, $P_{0,1}^{200}(X \ge 28) \approx 4{,}3\,\%$

Erscheinen mindestens 28 Personen mit Reservierung nicht zur Fahrt, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

e Bei der Durchführung des Tests beträgt das Risiko, die Anzahl der Reservierungen irrtümlich zu erhöhen, höchstens 5 % und ist damit gering. Die Wahrscheinlichkeit dafür, irrtümlich bei der bisherigen Anzahl zu bleiben, kann dagegen wesentlich größer sein. Damit stand bei der Wahl der Nullhypothese das Interesse im Vordergrund, dass nicht mehr Personen mit Reservierung abgewiesen werden müssen.

f Der Fehler zweiter Art tritt ein, wenn die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mit Reservierung nicht zur Fahrt erscheint, tatsächlich größer ist als 10 %, das Unternehmen aufgrund des Testergebnisses aber bei der bisherigen Anzahl der Reservierungen bleibt.

Standardbezug

	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	X				X			I		I	I	X		

b	2	X				X		I	I		I		X		
c	3	X						II			II	I		X	
2 a	1					X	I		I			I	X		
b	3				X	X		II	II		I			X	
c	4				X	X	II	III			II				X
d	5				X	X		II			II	II		X	
e	3					X	III		III			III			X
f	2					X			II			II		X	

2019 – WTR 1

Die Bigband einer Schule nimmt anlässlich des 50-jährigen Jubiläums der Schule eine CD mit zehn Musikstücken auf; vier dieser Stücke sind kurz, sechs lang. Diese CD wird in großer Anzahl hergestellt.

1 Bei der Jubiläumsfeier werden von einer dieser CDs in zufälliger Reihenfolge Stücke abgespielt, wobei jedes Stück auch mehrfach abgespielt werden kann.

a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei abgespielten Stücke verschieden sind. 2

b Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zwölf abgespielten Stücken 4

- genau fünf lange Stücke befinden.
- mehr lange als kurze Stücke befinden.

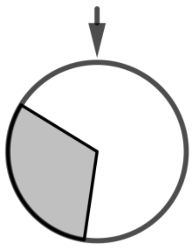
2 Als die CDs vor der Jubiläumsfeier geliefert wurden, entdeckten die Mitglieder der Bigband unter den ersten 20 betrachteten CDs ein Exemplar mit fehlerhafter Hülle und befürchteten, dass mindestens 5 % aller Hüllen fehlerhaft sind. Sie planten deshalb die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 10 % und der Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Hüllen ist kleiner als 5 %.“ Sollte das Ergebnis des Tests dafür sprechen, dass die Befürchtung zutrifft, wollten sie beim Hersteller einen Preisnachlass verlangen.

a Geben Sie eine Überlegung an, die zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe. 3

b Dem Test wurde eine Stichprobe von 150 CDs zugrunde gelegt. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. 5

c Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von 250 CDs durchführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn mindestens 18 Hüllen fehlerhaft sind. Ermitteln Sie den Bereich, in dem der tatsächliche Anteil fehlerhafter Hüllen liegen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kleiner als 25 % ist. 4

3 Bei der Jubiläumsfeier können die CDs sowohl zu einem Preis von 9 Euro pro Stück gekauft als auch bei einem Spiel gewonnen werden. Für das Spiel wird ein Glücksrad mit einem grauen und einem weißen Sektor verwendet (vgl. Abbildung). Für einen Einsatz von einem Euro wird das Glücksrad dreimal gedreht. Nur wenn dabei genau zweimal der grau markierte Sektor getroffen wird, erhält man eine CD. Die Größe des Öffnungswinkels des grauen Sektors im Bogenmaß wird mit b bezeichnet.



a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel eine CD zu erhalten, mithilfe des Terms $\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3$ berechnet werden kann. 4

b Es gibt Werte von b, für die die Bigband bei vielfacher Durchführung des Spiels im Mittel pro CD die gleichen Einnahmen erwarten könnte wie beim Verkauf der CD. Geben Sie eine Gleichung an, mit der diese Werte von b berechnet werden könnten. 3

Erwartungshorizont

1 a $\frac{9}{10} \cdot \frac{8}{10} = 72\%$

b X: Anzahl der gespielten langen Stücke

$P_{0,6}^{12}(X = 5) \approx 10{,}1\%$

$P_{0,6}^{12}(X > 6) \approx 66{,}5\%$

2 a Es soll vermieden werden, dass ein Preisnachlass verlangt wird, obwohl der Anteil der fehlerhaften Hüllen kleiner als 5 % ist.

Begründung: Durch die gewählte Nullhypothese wird das Risiko für den Fehler, der vermieden werden soll, begrenzt.

b Y: Anzahl der CDs mit fehlerhaften Hüllen

$P_{0,05}^{150}(Y \geq k) \leq 0{,}1 \Leftrightarrow k \geq 12$

Damit: Sind mindestens zwölf Hüllen fehlerhaft, wird ein Preisnachlass verlangt.

c $P_{0,081}^{250}(Y \leq 17) \approx 0{,}26$

$P_{0,082}^{250}(Y \leq 17) \approx 0{,}24997$

Da die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art mit steigendem Anteil fehlerhafter Hüllen abnimmt, ergibt sich für den gesuchten Bereich näherungsweise $[0{,}082;1]$.

3 a $\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{b}{2\pi}\right) = 3 \cdot \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot \left(1 - \frac{b}{2\pi}\right) = \frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3$

b $\frac{3}{4\pi^2}b^2 - \frac{3}{8\pi^3}b^3 = \frac{1}{9}$

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2		I	I		I		X		
b	4			I		I		X		
2 a	3	III		III			II			X
b	5	II	II	II		II			X	
c	4	III	III	III		II	II			X
3 a	4		II	II		II	I		X	
b	3		II	II		II			X	

2020 – WTR 2

1 Ein Fahrradhändler hat festgestellt, dass es sich bei 40 % aller von ihm verkauften Fahrräder um Mountainbikes handelt. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl verkaufter Fahrräder die Anzahl der Mountainbikes binomialverteilt ist.

a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer zufälligen Auswahl von 100 verkauften Fahrrädern genau 30 Mountainbikes befinden. 1

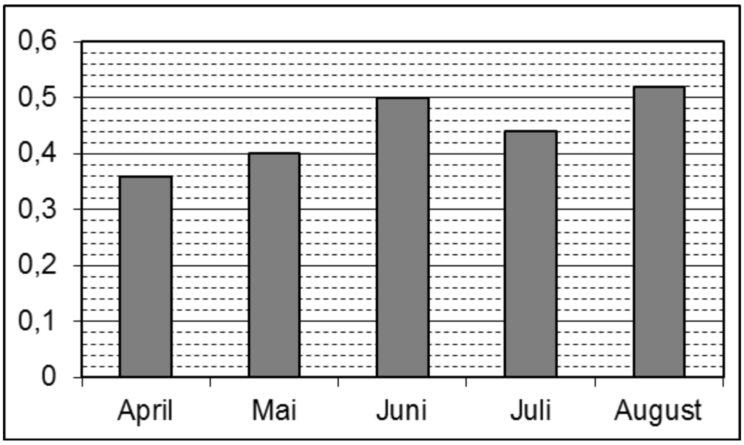
b Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $1-0{,}6^{10}-10\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^{9}$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an. 3

c Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufälligen Auswahl von 250 verkauften Fahrrädern die Anzahl der Mountainbikes um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. 3

d 20 % aller verkauften Fahrräder haben einen Rahmen aus Aluminium. 45 % aller verkauften Fahrräder sind weder Mountainbikes noch haben sie einen Rahmen aus Aluminium. Bestimmen Sie den Anteil der Fahrräder mit einem Rahmen aus Aluminium unter den verkauften Mountainbikes. 4

e Der Händler hat berechnet, dass er im September des Jahres 2020 mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 96 % mehr als 800 Mountainbikes verkaufen wird. Ermitteln Sie, von welcher Anzahl verkaufter Fahrräder er bei seiner Berechnung mindestens ausgegangen ist. 4

Die Abbildung zeigt für einige Monate des Jahres 2019 jeweils den Anteil der Mountainbikes unter allen verkauften Fahrrädern.



f Im April wurden 810 Mountainbikes verkauft. Bestimmen Sie für diesen Monat die Anzahl aller verkauften Fahrräder. 2

g Der Anteil der Mountainbikes lag im Mai und Juni insgesamt bei 46 %; im Juli war er größer als im Mai und im August größer als im Juni. Entscheiden Sie, ob es dennoch möglich ist, dass der Anteil der Mountainbikes im Juli und August insgesamt kleiner war als insgesamt im Mai und Juni. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 3

2 Zucker wird in unterschiedlich großen Packungen angeboten. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Packungsgröße die tatsächliche Masse des Zuckers durch eine normalverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

a Für eine bestimmte Packungsgröße ist $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{200\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-500)^2}{200}}$ der Term der zugehörigen Dichtefunktion, wobei x die Masse des Zuckers in Gramm ist. Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Masse jeweils in Gramm an. 2

b Bei einer anderen Packungsgröße beträgt der Erwartungswert für die Masse des Zuckers 250 g, die Standardabweichung 5 g. Bestimmen Sie – auf 1 g genau – das kleinste Intervall, das mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % die tatsächliche Masse des Zuckers enthält und symmetrisch bezüglich des Erwartungswerts ist. 3

<u>Erwartungshorizont</u>

1 a $P_{0,4}^{100}(30)\approx 1,0\%$

b Zufallsexperiment: Zehn verkaufte Fahrräder werden zufällig ausgewählt.
Ereignis: „Mindestens zwei der Fahrräder sind Mountainbikes."

c Y: Anzahl der Mountainbikes
$0,4\cdot 250=100$
$P_{0,4}^{250}(Y\geq 110)\approx 11,0\%$

d M: Ein zufällig ausgewähltes verkauftes Fahrrad ist ein Mountainbike.
A: Ein zufällig ausgewähltes verkauftes Fahrrad hat einen Rahmen aus Aluminium.

	M	$\overline{M}$	
A	5 %		20 %
$\overline{A}$	35 %	45 %	80 %
	40 %		100 %

Der gesuchte Anteil ist $\frac{5\%}{40\%}=12,5\%$.

e $P_{0,4}^{2099}(Y>800)\approx 95,95\%$

$P_{0,4}^{2100}(Y>800)\approx 96,10\%$

Der Händler ist von mindestens 2100 verkauften Fahrrädern ausgegangen.

f $\frac{810}{0,36}=2250$

g Es ist möglich. Wurden beispielsweise im Juli 10 000 Fahrräder verkauft und im August 1000, so ergibt sich für diese beiden Monate insgesamt für den Anteil der verkauften Mountainbikes $\frac{0,44\cdot 10000+0,52\cdot 1000}{11000}<0,46$.

2 a Erwartungswert: 500 g
Standardabweichung: 10 g

b X: Masse des Zuckers in Gramm
$P(239\leq X\leq 261)\approx 97,2\%$ und $P(238\leq X\leq 262)\approx 98,4\%$ liefern $[238;262]$.

Standardbezug

	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	1			I		I		X		
b	3	II		II	II		II		X	
c	3		II	II		I			X	
d	4		II			I	I		X	
e	4		III	II		II	II			X
f	2				I	I		X		
g	3	III	III		I	I	II			X
2 a	2				I	I		X		
b	3		II	II		II	II		X	

2020 – CAS 2

1 Betrachtet werden Bauteile der Kategorien A und B, die jeweils elektrische Widerstände enthalten. Es gilt:

- Ein Bauteil der Kategorie A ist funktionstüchtig, wenn alle enthaltenen Widerstände funktionstüchtig sind.
- Ein Bauteil der Kategorie B ist funktionstüchtig, wenn mindestens einer der enthaltenen Widerstände funktionstüchtig ist.

Zunächst soll davon ausgegangen werden, dass jeder Widerstand mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % funktionstüchtig ist.

a Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 6

E_1: „Ein Bauteil der Kategorie A, das zwei Widerstände enthält, ist funktionstüchtig."

E_2: „Ein Bauteil der Kategorie B, das zwei Widerstände enthält, ist funktionstüchtig."

b Beurteilen Sie die folgende Aussage: 3

„Je mehr Widerstände ein Bauteil der Kategorie A enthält, desto kleiner wird die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es funktionstüchtig ist."

Bei veränderten Bedingungen ist für jeden Widerstand die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er funktionstüchtig ist, p.

c Betrachtet wird ein Bauteil der Kategorie B, das zwei Widerstände enthält. Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Bauteil funktionstüchtig ist, durch den Term $2p-p^2$ angegeben wird. 2

d Betrachtet werden zehn Bauteile der Kategorie B, die jeweils zwei Widerstände enthalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Bauteile alle funktionstüchtig sind, beträgt 95 %. Bestimmen Sie den Wert von p. 3

e Betrachtet wird eine Kombination aus zwei Bestandteilen: einem einzelnen Widerstand und einem Bauteil der Kategorie A, das zwei Widerstände enthält. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Kombination funktionstüchtig ist, wird durch den Term $1-(1-p)\cdot\left(1-p^2\right)$ angegeben. Geben Sie die Abhängigkeit der Funktionstüchtigkeit dieser Kombination von der Funktionstüchtigkeit seiner beiden Bestandteile an. Begründen Sie Ihre Angabe. 3

[restliche Aufgabe zum „Schätzen von Parametern"]

Erwartungshorizont

1 a W_1: Der eine der beiden Widerstände ist funktionstüchtig.

W_2: Der andere der beiden Widerstände ist funktionstüchtig.

	W_1	$\overline{W_1}$	
W_2	0,9604	0,0196	0,98
$\overline{W_2}$	0,0196	0,0004	0,02

	0,98		

$P(E_1) = 0{,}9604$
$P(E_2) = 1 - 0{,}0004 = 0{,}9996$

b Die Aussage ist richtig.

Begründung: Ein Bauteil der Kategorie A, das n Widerstände enthält, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}98^n$ funktionstüchtig. Der Wert von $0{,}98^n$ nimmt mit zunehmendem Wert von n ab.

c $1-(1-p)^2 = 2p - p^2$

d Für $0 \le p \le 1$ liefert $\left(2p - p^2\right)^{10} = 0{,}95$: $p \approx 0{,}928$

e Die Kombination ist funktionstüchtig, wenn mindestens einer der beiden Bestandteile funktionstüchtig ist.

Begründung: $1-p$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der einzelne Widerstand nicht funktionstüchtig ist, $1-p^2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil der Kategorie A nicht funktionstüchtig ist. Damit ist $(1-p)\cdot\left(1-p^2\right)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Bestandteile nicht funktionstüchtig sind. Der angegebene Term gibt die Wahrscheinlichkeit des zugehörigen Gegenereignisses an.

Standardbezug

	BE	**allgemeine mathematische Kompetenzen**						**Anforderungsbereich**		
		K1	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**I**	**II**	**III**
1 a	6			I	I	I	I	X		
b	3	II		I		I	II		X	
c	2			II		I	I		X	
d	3		II	I		I			X	
e	3	III		II	II		II			X